

注意：

允许学生个人、非营利性的图书馆或公立学校合理使用 IMC 各项试题及其解答。可直接下载而不须申请。

重版、系统地复制或大量重制本资料的任何部分，必须获得 IMC 行政委员会的授权许可。

申请此项授权请电邮 IMC 行政委员会主席孙文先

[ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the IMC Executive Board. Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**



第一部份：

填充题，请将答案填写在题末所附的空格内，共十二题，每题 5 分。

1. 函数  $F$  应用于四位正整数  $\overline{abcd}$  时可得到整数  $F(\overline{abcd}) = a^4 + b^3 + c^2 + d^1$ 。

例如  $F(2019) = 2^4 + 0^3 + 1^2 + 9^1 = 26$ 。

请计算  $F(2019) - F(2018) + F(2017) - F(2016) + \dots - F(2000)$  之值。

*Answer:* \_\_\_\_\_

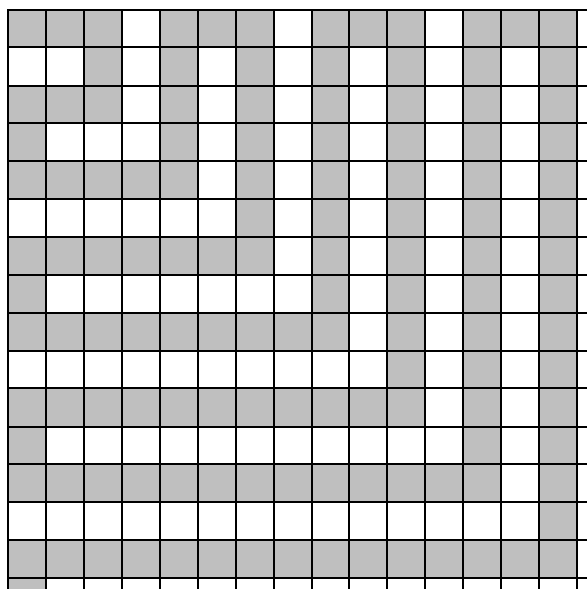
2. 请问使得  $55n^3$  恰好有 55 个正因子（包括 1 与自身）的最小正整数  $n$  是什么？

*Answer:* \_\_\_\_\_

3. 有 A、B、C 三个盒子，里面依序分有 100、50、80 颗大小相同的珠子。每个盒子内都有一些黑色珠子，已知盒子 A 里有 15 颗黑色珠子。如果随机从三个盒子中选一个盒子然后随机从此盒子中抽取一颗珠子，这样得到一颗黑色珠子的机率是  $\frac{101}{600}$ 。请问盒子 C 内最多可能有多少颗黑色珠子？

*Answer:* \_\_\_\_\_ 颗

4. 下图是一张  $101 \times 101$  的白色方格表的左上角部分，用如图所示之方式涂上一条灰色方格链。这条链从左上角的方格开始，直到不能再继续为止。请问在原本  $101 \times 101$  的方格表上有多少个小方格被涂上灰色？

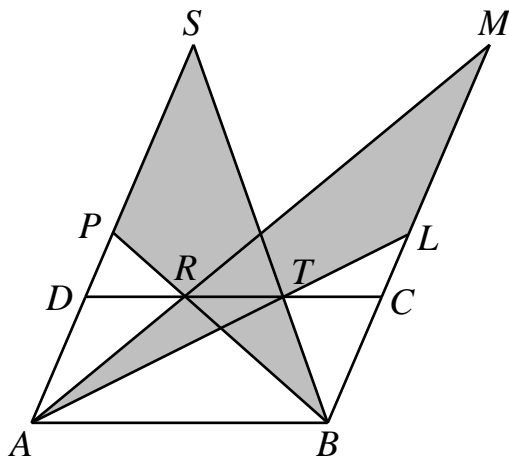


*Answer:* \_\_\_\_\_ 个

5. 请问总共有多少三位正整数恰好可以表示成九个 2 的相异幂之和？

*Answer:* \_\_\_\_\_ 个

6. 如图所示, 点  $R$  与  $T$  在平行四边形  $ABCD$  的边  $CD$  上使得  $DR = RT = TC$ , 直线  $AR$  与  $AT$  分别交直线  $BC$  的延长线于点  $M$  与点  $L$ 、直线  $BT$  与  $BR$  分别交直线  $AD$  的延长线于点  $S$  与点  $P$ 。已知平行四边形  $ABCD$  的面积是  $48 \text{ cm}^2$ , 请问阴影部分的面积是多少  $\text{cm}^2$ ?



**Answer:** \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$

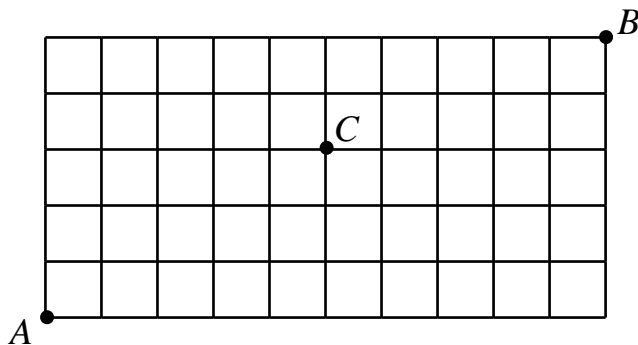
7. 已知正整数对  $(x, y)$  满足  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$ 。请问  $x$  与  $y$  的乘积共有多少个不同的可能值?

**Answer:** \_\_\_\_\_ 个

8. 已知整数对  $(m, n)$  满足  $\frac{(m^2 + mn + n^2)}{(m + 2n)} = \frac{13}{3}$ 。请问  $m + 2n$  的值是什么?

**Answer:** \_\_\_\_\_

9. 如图所示, 在  $10 \times 5$  方格表中, 一只蚂蚁从点  $A$  出发, 只能沿着网格线向右或向上移动, 但不允许经过点  $C$ 。请问这只蚂蚁从点  $A$  出发沿着网格线最后到达点  $B$  爬行总共有多少条不同的路径?

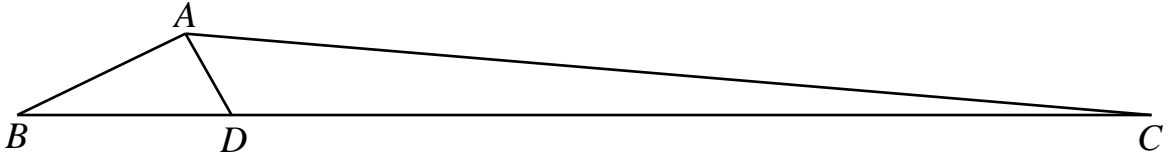


**Answer:** \_\_\_\_\_ 条

10. 设  $f$  是从非负实数到非负实数的一个函数，并满足  $f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) = 3f(a)f(b)f(c)$  与  $f(1) \neq 1$ ，其中  $a, b, c$  为非负实数。请求出  $f(2019)$  之值。

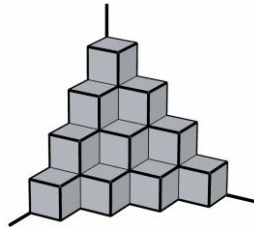
*Answer:* \_\_\_\_\_

11. 如图所示，在三角形  $ABC$  中，已知  $\angle BAC = 150^\circ$  且  $BC = 74$  cm，点  $D$  在边  $BC$  上使得  $BD = 14$  cm。若  $\angle ADB = 60^\circ$ ，请问三角形  $ABC$  的面积为多少  $\text{cm}^2$ ？



*Answer:* \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$

12. 下图为利用一些完全相同的正立方体在房间角落堆成的一座三角锥塔。若恰好使用 1330 个完全相同的正立方体依此方式堆成一座三角锥塔，请问这座塔共有多少层？注意到并不是所有的正立方体都能被看见。



*Answer:* \_\_\_\_\_ 层

### 第二部份：

计算与证明题，请在题目下空白处写出计算或证明过程。共三题，每题 20 分。

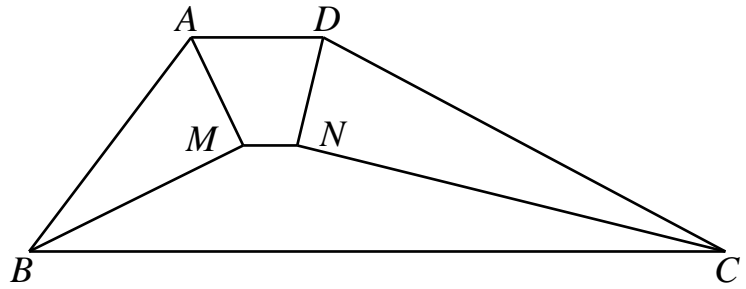
1. 在递增数列 1、3、4、9、10、12、13、... 中，包含可写成 3 的幂或 3 的不同幂之和的所有正整数。请问此数列的第 100 项之值是什么？

*Answer:* \_\_\_\_\_

2. 请找出满足方程  $7x^2 - 40xy + 7y^2 = (|x - y| + 2)^3$  的所有整数对  $(x, y)$ 。

*Answer:* \_\_\_\_\_

3. 在一个四边形  $ABCD$  中，已知  $BC$  与  $AD$  平行且已知  $BC = 26\text{cm}$ 、 $AD = 5\text{cm}$ 、 $AB = 10\text{cm}$ 、 $CD = 17\text{cm}$ 。若  $\angle A$  与  $\angle B$  的角平分线相交于点  $M$ 、 $\angle C$  与  $\angle D$  的角平分线相交于点  $N$ ，请问  $MN$  的长度为多少  $\text{cm}$ ？



*Answer:* \_\_\_\_\_ cm