

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用 IMC 各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製本資料的任何部分，必須獲得 IMC 行政委員會的授權許可。

申請此項授權請電郵 IMC 行政委員會主席孫文先

ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the IMC Executive Board. Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

第一部份：

填充題，請將答案填寫在題末所附的空格內，共十二題，每題 5 分。

1. 函數 F 應用於四位正整數 \overline{abcd} 時可得到整數 $F(\overline{abcd}) = a^4 + b^3 + c^2 + d^1$ 。

例如 $F(2019) = 2^4 + 0^3 + 1^2 + 9^1 = 26$ 。

請計算 $F(2019) - F(2018) + F(2017) - F(2016) + \dots - F(2000)$ 之值。

Answer : _____

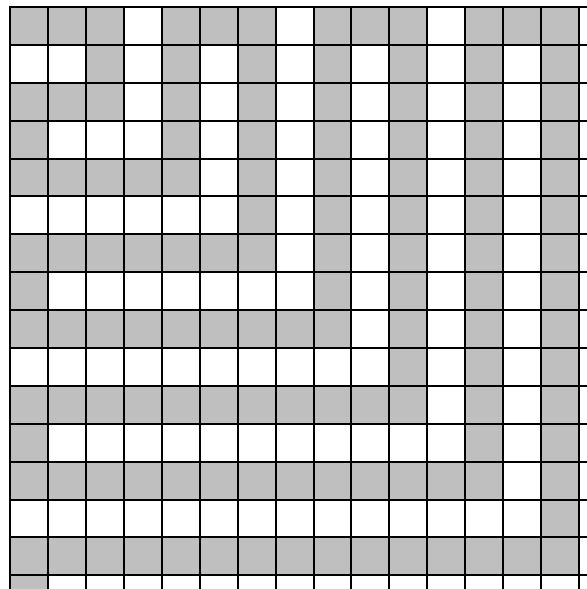
2. 請問使得 $55n^3$ 恰好有 55 個正因數（包括 1 與自身）的最小正整數 n 是什麼？

Answer : _____

3. 有 A、B、C 三個盒子，裡面依序分有 100、50、80 顆大小相同的珠子。每個盒子內都有一些黑色珠子，已知盒子 A 裡有 15 顆黑色珠子。如果隨機從三個盒子中選一個盒子然後隨機從此盒子中抽取一顆珠子，這樣得到一顆黑色珠子的機率是 $\frac{101}{600}$ 。請問盒子 C 內最多可能有多少顆黑色珠子？

Answer : _____ 顆

4. 下圖是一張 101×101 的白色方格表的左上角部分，用如圖所示之方式塗上一條灰色方格鏈。這條鏈從左上角的方格開始，直到不能再繼續為止。請問在原本 101×101 的方格表上有多少個小方格被塗上灰色？

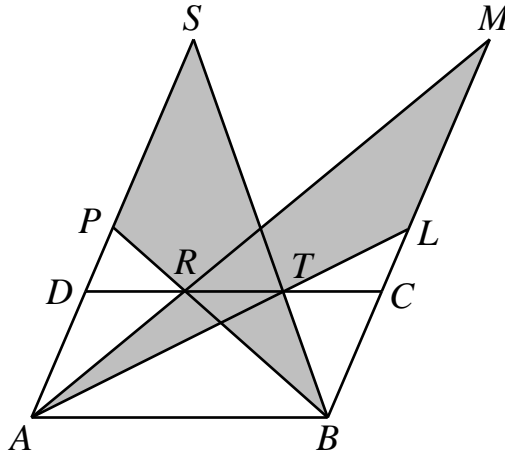


Answer : _____ 個

5. 請問總共有多少三位正整數恰好可以表示成九個 2 的相異冪之和？

Answer : _____ 個

6. 如圖所示，點 R 與 T 在平行四邊形 $ABCD$ 的邊 CD 上使得 $DR = RT = TC$ ，直線 AR 與 AT 分別交直線 BC 的延長線於點 M 與點 L 、直線 BT 與 BR 分別交直線 AD 的延長線於點 S 與點 P 。已知平行四邊形 $ABCD$ 的面積是 48 cm^2 ，請問陰影部分的面積是多少 cm^2 ？



Answer : _____ cm^2

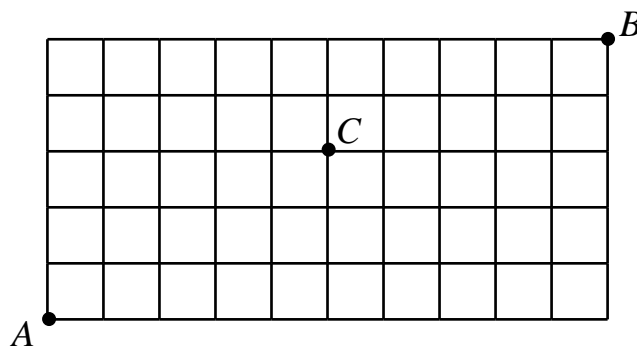
7. 已知正整數對 (x, y) 滿足 $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$ 。請問 x 與 y 的乘積共有多少個不同的可能值？

Answer : _____ 個

8. 已知整數對 (m, n) 滿足 $\frac{(m^2 + mn + n^2)}{(m + 2n)} = \frac{13}{3}$ 。請問 $m + 2n$ 的值是什麼？

Answer : _____

9. 如圖所示，在 10×5 方格表中，一隻螞蟻從點 A 出發，只能沿著格線向右或向上移動，但不允許經過點 C 。請問這隻螞蟻從點 A 出發沿著格線最後到達點 B 爬行總共有多少條不同的路徑？



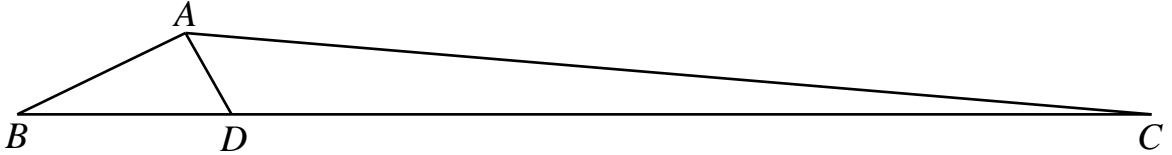
Answer : _____ 條

10. 設 f 是從非負實數到非負實數的一個函數，並滿足

$f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) = 3f(a)f(b)f(c)$ 與 $f(1) \neq 1$ ，其中 a, b, c 為非負實數。
請求出 $f(2019)$ 之值。

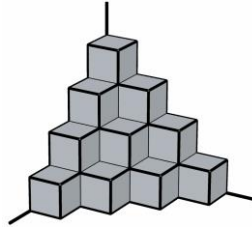
Answer : _____

11. 在三角形 ABC 中，已知 $\angle BAC = 150^\circ$ 且 $BC = 74$ cm，點 D 在邊 BC 上使得 $BD = 14$ cm，如圖所示。若 $\angle ADB = 60^\circ$ ，請問三角形 ABC 的面積為多少 cm^2 ？



Answer : _____ cm^2

12. 下圖為利用一些完全相同的正立方體在房間角落堆成的一座三角錐塔。若恰好使用 1330 個完全相同的正立方體依此方式堆成一座三角錐塔，請問這座塔共有多少層？注意到並不是所有的正立方體都能被看見。



Answer : _____ 層

第二部份：

計算與證明題，請在題目下空白處寫出計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

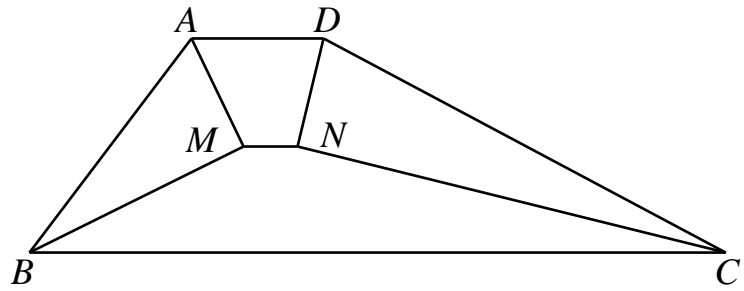
1. 在遞增數列 $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \dots$ 中，包含可寫成 3 的冪或 3 的不同冪之和的所有正整數。請問此數列的第 100 項之值是什麼？

Answer : _____

2. 請找出滿足方程 $7x^2 - 40xy + 7y^2 = (|x - y| + 2)^3$ 的所有整數對 (x, y) 。

Answer : _____

3. 在一個四邊形 $ABCD$ 中，已知 BC 與 AD 平行且已知 $BC = 26\text{cm}$ 、 $AD = 5\text{cm}$ 、 $AB = 10\text{cm}$ 、 $CD = 17\text{cm}$ 。若 $\angle A$ 與 $\angle B$ 的角平分線相交於點 M 、 $\angle C$ 與 $\angle D$ 的角平分線相交於點 N ，請問 MN 的長度為多少 cm ？



Answer : _____ cm