



*Indonesia International Mathematics
Competition 2021 (Virtual)*
Indonesia, 27th July to 1st August 2021

青少年数学国际城市邀请赛
个人赛试题

答题时间：120 分钟

答题指引：

- 个人赛试题答题时间共 120 分钟，包括两个部份：
第一部份包括填充题 12 题，只须填写阿拉伯数值答案(中文数字不予计分)；
第二部份包括计算与证明题 3 题，必须填写详细计算过程或证明。
- 第一部份每道题目 5 分，没有部分分数，答错不倒扣分数。您所填入的答案个数不得多于所要求的答案个数。若题目有不只一个答案，则全部答对才给分。
第二部份每道题目 20 分，将根据答题情况给予部份分数。
- 题目中所提供之图形只是示意图，不一定精准。

作答须知：

- 请在本页的对应位置填写您的队名、姓名及编号。
- 第一部份填充题，请将答案填写在答案卷所附的空格内。
第二部份计算与证明题，请在答案卷指定空白处写出计算或证明过程。
- 可使用 HB、B、2B 铅笔、蓝色或黑色原子笔作答。
- 不得使用任何计算器具、电子仪器与量角器。
- 答题结束后，请将您的题目卷、答案卷与所有草稿纸装入信封并交由监试人员收回。

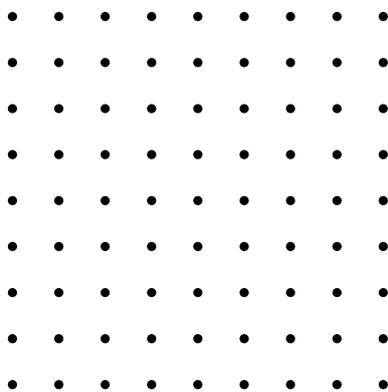
Simplified Chinese Version
简体中文版

队名：_____ 姓名：_____ 编号：_____ 分数：_____

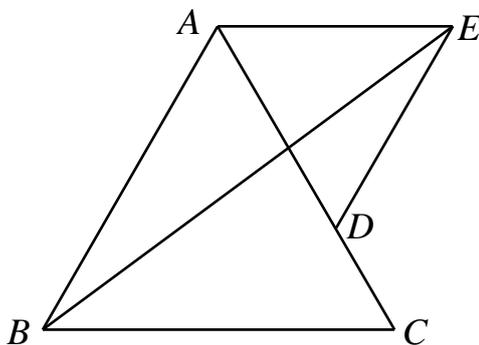
第一部份：

填充題，請將答案填寫在題末所附的空格內，共十二題，每題 5 分。

1. 如图所示，将 81 个点排成 9×9 的方阵，同一行与同一列上相邻两点的距离都为 1 cm。请问四个顶点都在这 81 个点上且面积为 12 cm^2 不同位置的矩形总共有多少个？

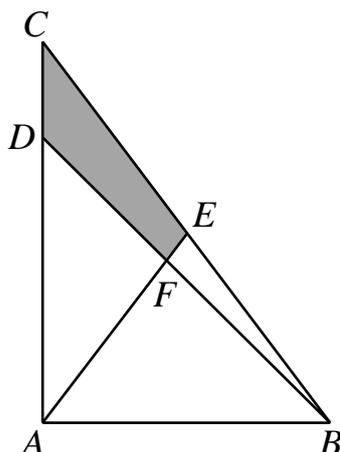


2. 将 99 个数沿着圆周放置，每一个数都是 1 或 -1 ，接着将每组连续 10 个数的乘积都计算出来。设 S 是这 99 个乘积的和。若圆周上的数中至少有一个是 1 且至少有一个是 -1 ，请问 S 的最大可能值与最小可能值的差是多少？
3. 已知 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 都为首项系数为 1 的两个整系数二次多项式且满足 $P(Q(0)) = Q(P(0)) = 1$ 与 $P(0) + Q(0) = 2$ 。请问 $P(3) + Q(3)$ 的值是什么？
4. 已知 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 是 1, 2, 3, \dots , 9 的任意排列，请问算式 $|a_1 - \sqrt{3}a_2| + |a_2 - \sqrt{3}a_3| + |a_3 - \sqrt{3}a_4| + \dots + |a_8 - \sqrt{3}a_9| + |a_9 - \sqrt{3}a_1|$ 的最大可能值是什么？
5. 已知 ABC 与 ADE 都是正三角形，它们的边长分别为 6 cm 与 4 cm，如图所示。请问 BE 的长度为多少 cm？

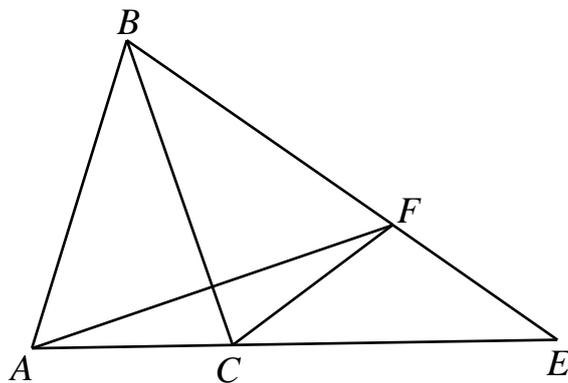


6. 已知实数 x 与 y 满足 $(2x + \sqrt{1 + 4x^2})(3y + \sqrt{1 + 9y^2}) = 1$ 。请问 $(2x + 3y)^2$ 的值是什么？

7. 已知角 A 是直角, $AB=3\text{cm}$, $BC=5\text{cm}$, $CD=1\text{cm}$, 如图所示。若 $BE=EC$, 请问阴影部分的面积是多少 cm^2 ?



8. 如果一个质数可以写成 $k^k + 1$ 的形式, 其中 k 是正整数, 则我们称这个质数为 **IMC 质数**。请问不超过 20212021 的最大 **IMC 质数** 是什么?
9. 在等腰三角形 ABC 中, 已知 $AB=BC$, 且点 E 在 AC 的延长线上(点 C 在点 A 与点 E 之间)与线段 BE 上一点 F 使得 $AC=CF=FE$ 且 $\angle BAF = 3\angle FAE$, 如图所示。请问 $\angle FAE$ 为多少度?

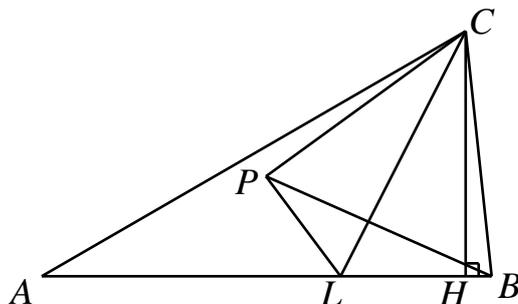


10. 请问使得 $n+3$ 整除 $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ 的最大正整数 n 是什么?
11. 岛国 IMC 国包括 8 个岛屿, 它们之间都互不连接。每位公民都想要能造访其它的岛屿, 于是政府将在岛屿之间修建一些桥梁。然而, 每个岛屿内都有一座火山, 随时可能喷发, 此时会破坏这个岛屿以及跟它相连的所有桥梁。政府希望保证一旦任何一个火山喷发后, 剩余 7 个岛屿的公民们都可以出门旅游, 造访其它的岛屿恰好各一次且回到自己所居住的岛屿(只能是旅游的终点)。请问至少需要修建多少座桥梁?
12. 已知 $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{2021}$, 请问 $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ 的数值是什么?

第二部份：

计算与证明题，请在题目下空白处写出计算或证明过程。共三题，每题 20 分。

1. 锐角三角形 ABC 内一点 P 使得 $CP = BP$ 且 $\angle BPC = 2\angle BAC$ 。令 $\angle ACB$ 的角平分线与 AB 交于点 L 。已知点 H 在 AB 上，使得 $CH \perp AB$ ，其中点 L 在点 A 与点 H 之间，如下图所示。如果 $CP = CH = 28\text{cm}$ 且三角形 CPL 的面积为 196cm^2 ，请问 LH 的长度为多少 cm ？



2. 某班级有 14 位男生与 17 位女生，现在要分发一些糖果，每人至少分到一块糖。每位男生收到的糖果数量与其他的男生相同，每位女生收到的糖果数量与其他的女生相同，一个男生收到的糖果数量和一个女生收到的糖果数量可能不相同。如果糖果的总数量无法用别的方法分配并满足上述的性质，请问我们拥有的糖果之最大数量为何？
3. 已知 C_{1010}^{2021} 可被 $2^M \times 3^N$ 整除，其中 M 与 N 为非负整数。请问 $M + N$ 所有可能正值的和是什么？（ C_{1010}^{2021} 表示在 2021 件物品中同时不重复地取出 1010 件的方法数。）