



*Indonesia International Mathematics
Competition 2021 (Virtual)*
Indonesia, 27th July to 1st August 2021

青少年數學國際城市邀請賽

個人賽試題

答題時間：120 分鐘

答題指引：

- 個人賽試題答題時間共 120 分鐘，包括兩個部份：
第一部份包括填充題 12 題，只須填寫阿拉伯數值答案(中文數字不予計分)；
第二部份包括計算與證明題 3 題，必須填寫詳細計算過程或證明。
- 第一部份每道題目 5 分，沒有部分分數，答錯不倒扣分數。您所填入的答案個數不得多於所要求的答案個數。若題目有不只一個答案，則全部答對才給分。
第二部份每道題目 20 分，將根據答題情況給予部份分數。
- 題目中所提供之圖形只是示意圖，不一定精準。

作答須知：

- 請在本頁的對應位置填寫您的隊名、姓名及編號。
- 第一部份填充題，請將答案填寫在答案卷所附的空格內。
第二部份計算與證明題，請在答案卷指定空白處寫出計算或證明過程。
- 可使用 HB、B、2B 鉛筆、藍色或黑色原子筆作答。
- 不得使用任何計算器具、電子儀器與量角器。
- 答題結束後，請將您的題目卷、答案卷與所有草稿紙裝入信封並交由監試人員收回。

Traditional Chinese Version

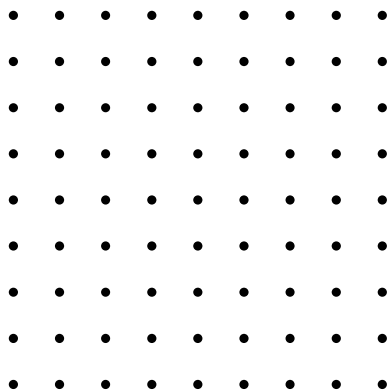
正體中文版

隊名： _____ 姓名： _____ 編號： _____

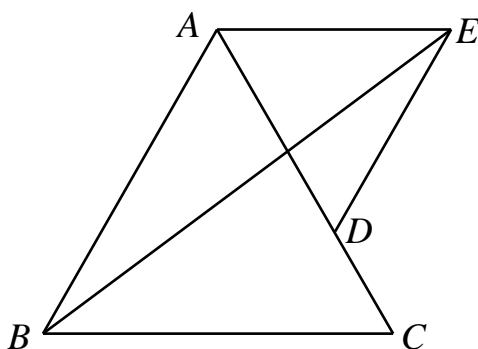
第一部份：

填充題，請將答案填寫在題末所附的空格內，共十二題，每題 5 分。

1. 如圖所示，將 81 個點排成 9×9 的方陣，同一行與同一列上相鄰兩點的距離都為 1 cm。請問四個頂點都在這 81 個點上且面積為 12 cm^2 不同位置的矩形總共有多少個？

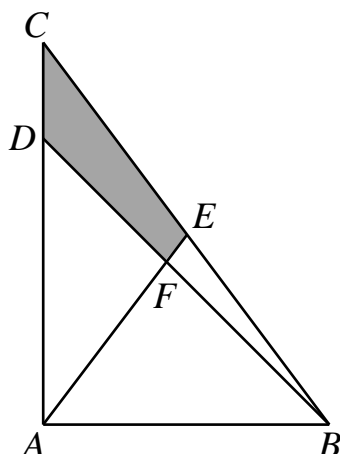


2. 將 99 個數沿著圓周放置，每一個數都是 1 或 -1 ，接著將每組連續 10 個數的乘積都計算出來。設 S 是這 99 個乘積的和。若圓周上的數中至少有一個是 1 且至少有一個是 -1 ，請問 S 的最大可能值與最小可能值的差是多少？
3. 已知 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 都為首項係數為 1 的兩個整係數二次多項式且滿足 $P(Q(0)) = Q(P(0)) = 1$ 與 $P(0) + Q(0) = 2$ 。請問 $P(3) + Q(3)$ 的值是什麼？
4. 已知 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 是 $1, 2, 3, \dots, 9$ 的任意排列，請問算式 $|a_1 - \sqrt{3}a_2| + |a_2 - \sqrt{3}a_3| + |a_3 - \sqrt{3}a_4| + \dots + |a_8 - \sqrt{3}a_9| + |a_9 - \sqrt{3}a_1|$ 的最大可能值是什麼？
5. 已知 ABC 與 ADE 都是正三角形，它們的邊長分別為 6 cm 與 4 cm，如圖所示。請問 BE 的長度為多少 cm？

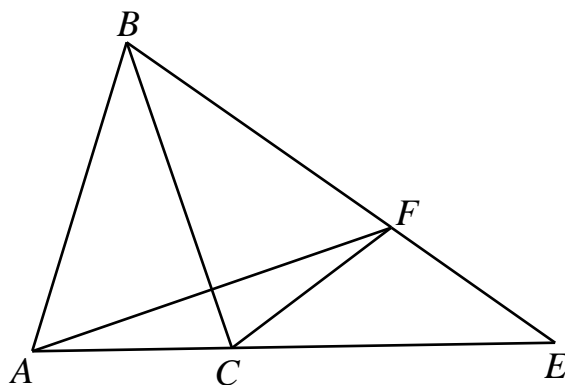


6. 已知實數 x 與 y 滿足 $(2x + \sqrt{1 + 4x^2})(3y + \sqrt{1 + 9y^2}) = 1$ 。請問 $(2x + 3y)^2$ 的值是什麼？

7. 已知角 A 是直角， $AB=3\text{ cm}$ ， $BC=5\text{ cm}$ ， $CD=1\text{ cm}$ ，如圖所示。若 $BE=EC$ ，請問陰影部分的面積是多少 cm^2 ？



8. 如果一個質數可以寫成 $k^k + 1$ 的形式，其中 k 是正整數，則我們稱這個質數為 **IMC 質數**。請問不超過 20212021 的最大 **IMC 質數** 是什麼？
9. 在等腰三角形 ABC 中，已知 $AB=BC$ ，且點 E 在 AC 的延長線上(點 C 在點 A 與點 E 之間)與線段 BE 上一點 F 使得 $AC=CF=FE$ 且 $\angle BAF=3\angle FAE$ ，如圖所示。請問 $\angle FAE$ 為多少度？

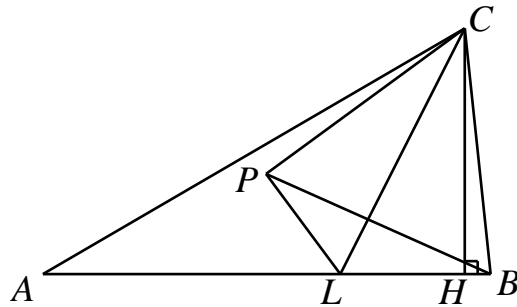


10. 請問使得 $n+3$ 整除 $1^3+2^3+\dots+n^3$ 的最大正整數 n 是什麼？
11. 島國 IMC 國包括 8 個島嶼，它們之間都互不連接。每位公民都想要能造訪其它的島嶼，於是政府將在島嶼之間修建一些橋樑。然而，每個島嶼內都有一座火山，隨時可能噴發，此時會破壞這個島嶼以及跟它相連的所有橋樑。政府希望保證一旦任何一個火山噴發後，剩餘 7 個島嶼的公民們都可以出門旅遊，造訪其它的島嶼恰好各一次且回到自己所居住的島嶼(只能是旅遊的終點)。請問至少需要修建多少座橋樑？
12. 已知 $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{2021}$ ，請問 $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ 的數值是什麼？

第二部份：

計算與證明題，請在題目下空白處寫出計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. 銳角三角形 ABC 內一點 P 使得 $CP = BP$ 且 $\angle BPC = 2\angle BAC$ 。令 $\angle ACB$ 的角平分線與 AB 交於點 L 。已知點 H 在 AB 上，使得 $CH \perp AB$ ，其中點 L 在點 A 與點 H 之間，如下圖所示。如果 $CP = CH = 28\text{cm}$ 且三角形 CPL 的面積為 196cm^2 ，請問 LH 的長度為多少 cm ？



2. 某班級有 14 位男生與 17 位女生，現在要分發一些糖果，每人至少分到一塊糖。每位男生收到的糖果數量與其他的男生相同，每位女生收到的糖果數量與其他的女生相同，一個男生收到的糖果數量與一個女生收到的糖果數量可能不相同。如果糖果的總數量無法用別的方法分配並滿足上述的性質，請問我們擁有的糖果之最大數量為何？
3. 已知 C_{1010}^{2021} 可被 $2^M \times 3^N$ 整除，其中 M 與 N 為非負整數。請問 $M + N$ 所有可能正值的和是什麼？(C_{1010}^{2021} 表示在 2021 件物品中同時不重複地取出 1010 件的方法數。)