



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛
个人赛试题

答题时间：120 分钟

答题指引：

- 个人赛试题答题时间共 120 分钟，包括两个部份：
第一部份包括填充题 12 题，只须填写阿拉伯数值答案(中文数字不予计分)；
第二部份包括计算与证明题 3 题，必须填写详细计算过程或证明。
- 第一部份每道题目 5 分，没有部分分数，答错不倒扣分数。您所填入的答案个数不得多于所要求的答案个数。若题目有不只一个答案，则全部答对才给分。
第二部份每道题目 20 分，将根据答题情况给予部份分数。
- 题目中所提供之图形只是示意图，不一定精准。

作答须知：

- 请在本页的对应位置填写您的队名、姓名及编号。
- 不得使用任何计算器具、电子仪器与量角器。
- 第一部份填充题，请将答案填写在答案卷所附的空格内。在网络上填写您的答案时，所有的题目都不必填写单位。填答的格式如下：
 1. 若您的答案为 $a.bc$ ，其中 a 、 b 与 c 都是数码，则输入 $a.bc$ 。
 2. 若您的答案为分数 $\frac{a}{b}$ ，其中 a 与 b 互质，则输入 a/b (例如，当您的答案为 $3\frac{2}{5}$ ，则请输入 17/5)。
 3. 若您的答案为比 $a:b$ ，则输入 $a:b$ 或 $a;b$ (在“:”或“;”之后不要输入空格键)。
 4. 若您的答案为数组 $(a, b, c, \dots)$ ，则输入 $a,b,c,\dots$ (在“,”之后不要输入空格键)。
 5. 若您的答案为 $a+b\times\sqrt{c}$ ，则输入 a,b,c (在“,”之后不要输入空格键。
例如，当您的答案为 $3+\sqrt{5}$ ，则请输入 3,1,5)。
- 在您完成考试作答后，第一部份的试题您最后必须点选 “send”，第二部份的试题您必须将您的答案卷拍照或扫描后上传至指定的网址。

Simplified Chinese Version

简体中文版

队名: _____ 姓名: _____ 编号: _____



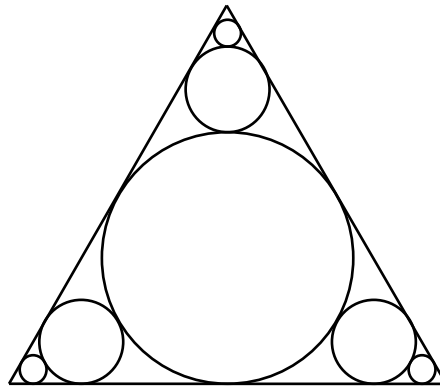
*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*
Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛

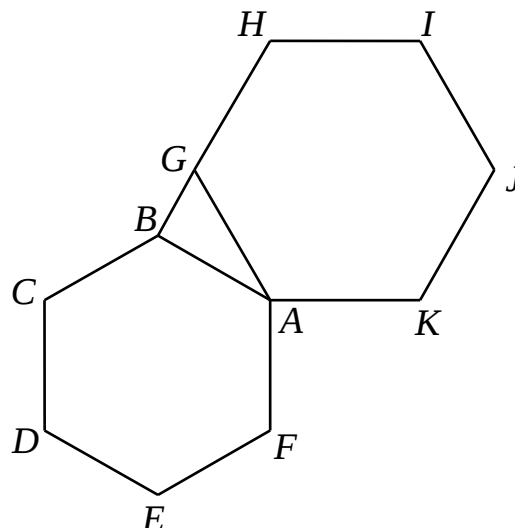
第一部份：

填充题，请将答案填写在题末所附的空格内，共十二题，每题 5 分。

1. 已知 x 是实数，且知 $y = \sqrt{3x+4} + \sqrt{4-3x}$ ，请问 y^2 的最小可能值是什么？
2. 一个半径为 1 cm 的圆与一个等边三角形的三边都相切。從這個圓開始，然後繪製三個無限小圓序列，每個角一個，使得每個圓都與序列中的前一个圆以及三角形的两条边相切，如圖所示。請問所有圆的周长之和為多少 cm？(取 $\pi = 3.14$)



3. 若 $ABCDEF$ 与 $AGHIJK$ 为不重迭的两个正六边形，如图所示。假设 $\angle FAK = 90^\circ$ 并且满足面积关系： $3 \times [AGHIJK] = 4 \times [ABCDEF]$ 。请问 $[ABG]:[AGHIJK]$ 为何？(注： $[P]$ 表示多边形 P 的面积)



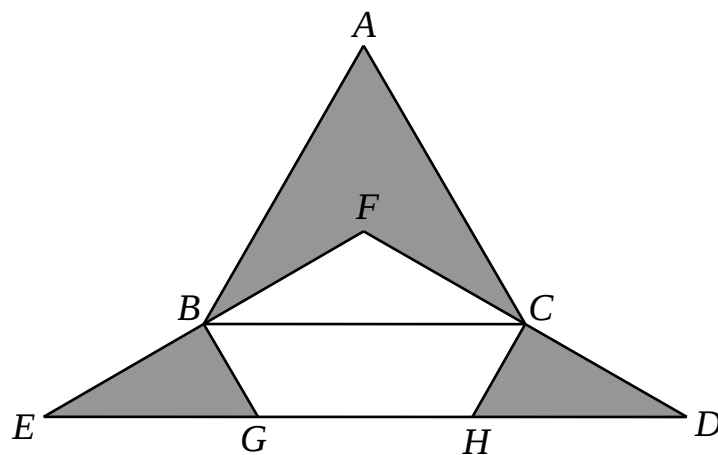


*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛

4. 以下的 53 位数
37,984,318,966,591,152,105,649,545,470,741,788,308,402,068,827,142,719
可以写成 n^{21} 的形式，其中 n 是正整数。請問 n 之值為何？
5. 考虑方程 $10y^2 - 9x^{2022} = y^4$ ，其中 x, y 为整数。假设 m 是 $x+y$ 的最大可能值， n 是解 (x, y) 的数量，请问 $m+n$ 之值為何？
6. 已知非零实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$ 。
请问 $S = \frac{a^4}{a^4 - (b^2 - c^2)^2} + \frac{b^4}{b^4 - (c^2 - a^2)^2} + \frac{c^4}{c^4 - (a^2 - b^2)^2}$ 之值為何？
7. 如果一个数可以写成 $2^a + 2^b$ ，其中 a, b 为不同的非负整数，那么称这个数为「幸运数」。将所有幸运数以递增方式列出，请问第 64 个幸运数是什么？
8. 已知等边三角形 ABC 的面积为 36 cm^2 ，且知等腰三角形 EFD 中， $EF = FD$ ，点 F 是三角形 ABC 的中心，并且点 B 与点 C 分别位于 EF 与 FD 的中点，如图所示。若 $BG \perp EF$ 且 $CH \perp DF$ ，请问阴影部分的面积是多少 cm^2 ？



9. 一家神秘的公司开发了一个先进机器，它需要 20 份不同的蓝图来建造。每位员工可以获得恰好 5 份不同的蓝图，并且任何 5 份不同的蓝图都至少有一位员工可以获得。公司总经理想要将员工分成一些部门，使得没有哪一个部门可以独自建造此机器。也就是说，没有任何一个部门能从该部门的至少一位员工中得到每一份蓝图。请问公司总经理最少需要组成几个部门？

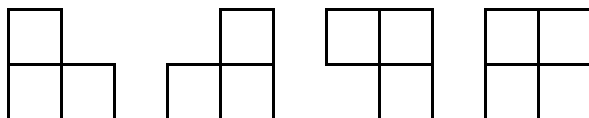


Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

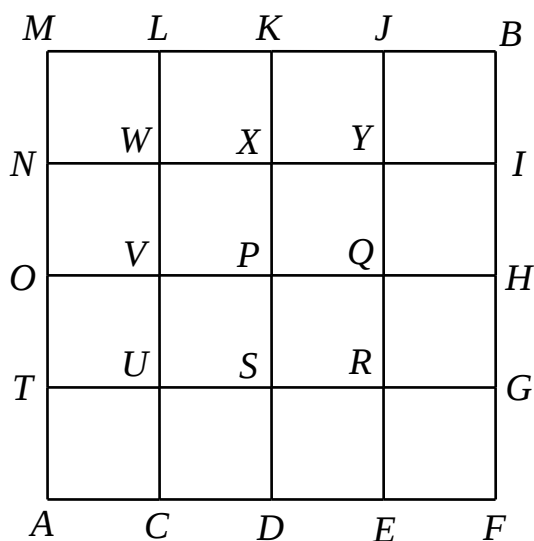
青少年数学国际城市邀请赛

10. 一片 V 形三方块是由 3 个 1×1 正方形构成，如下图所示：



所有 V 形三方块必须与方格表的网格线吻合，请问在一个 8×8 方格表内至少要放入多少片 V 形三方块才能使得剩下的空位无法再放入一片 2×2 的正方形？

11. 有 17 个空盒子以及无穷多个球。每一步，选择其中一些盒子，然后在每个盒子里放入不同个数的球，放入的球的数量都必须是 2 的非负整数次幂。经过 k 步之后，使得所有的盒子内都有相同非零数量的球，请问正整数 k 的最小值是什么？
12. 下图所示是一个形成 4×4 方阵的地下迷宫。一条初始位置在 P 点的蛇，沿着 $P-Q-R-S$ 的路径循环爬行。一只老鼠从点 A 开始沿着格线想爬到点 B 。老鼠每次只能向上或者向右爬行。老鼠与蛇的爬行速度相同，如果老鼠与蛇同时出现在同一点，则蛇会吃掉老鼠。已知老鼠与蛇同时出发，请问老鼠从点 A 爬到点 B 共有多少条安全路径？(例如: $A-C-D-E-R-G-H-I-B$ 是一条安全路径，因为当老鼠到达 R 时，蛇爬行的路径为 $P-Q-R-S-P$)





*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*
Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛

队名: _____ 姓名: _____ 编号: _____

第二部份:

计算与证明题, 请在题目下空白处写出计算或证明过程。共三题, 每题 20 分。

1. 请问方程 $x^2 - 8[x] + 7 = 0$ 有多少个实数解?

(注意: $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数。例如, $[3.14] = 3$ 而 $[-3.14] = -4$ 。)

答: _____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*
Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛

队名: _____ 姓名: _____ 编号: _____

2. 在一个正六边形上，小罗想要将每个顶点涂成红、蓝、绿之一的颜色，使得任何两个相邻的顶点之间的颜色不同。请问小罗共有多少种涂色方法？

答: _____ 种



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*
Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛

队名: _____ 姓名: _____ 编号: _____

3. 在三角形 ABC 中, 点 M 为 BC 中点。已知圆 O 经过点 A 与点 C , 且与直线 AM 相切。设 BA 的延长线与圆 O 相交于点 D , CD 的延长线与 MA 相交于点 P , 如图所示。请证明: $OP \perp BC$ 。

