



Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)
Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽
個人賽試題

答題時間：120 分鐘

答題指引：

- 個人賽試題答題時間共 120 分鐘，包括兩個部份：
第一部份包括填充題 12 題，只須填寫阿拉伯數值答案(中文數位不予計分)；
第二部份包括計算與證明題 3 題，必須填寫詳細計算過程或證明。
- 第一部份每道題目 5 分，沒有部分分數，答錯不倒扣分數。您所填入的答案個數不得多於所要求的答案個數。若題目有不只一個答案，則全部答對才給分。
第二部份每道題目 20 分，將根據答題情況給予部份分數。
- 題目中所提供之圖形只是示意圖，不一定精準。

作答須知：

- 請在本頁的對應位置填寫您的隊名、姓名及編號。
- 不得使用任何計算器具、電子儀器與量角器。
- 第一部份填充題，請將答案填寫在答案卷所附的空格內。在網路上填寫您的答案時，所有的題目**都不必填寫單位**。填答的格式如下：
 1. 若您的答案為 $a.bc$ ，其中 a 、 b 與 c 都是數碼，則輸入 $a.bc$ 。
 2. 若您的答案為分數 $\frac{a}{b}$ ，其中 a 與 b 互質，則輸入 a/b (例如，當您的答案為 $3\frac{2}{5}$ ，則請輸入 $17/5$)。
 3. 若您的答案為比 $a:b$ ，則輸入 $a:b$ 或 $a;b$ (在“:”或“;”之後不要輸入空白鍵)。
 4. 若您的答案為陣列 (a, b, c, \dots) ，則輸入 a,b,c,\dots (在“,”之後不要輸入空白鍵)。
 5. 若您的答案為 $a+b\times\sqrt{c}$ ，則輸入 a,b,c (在“,”之後不要輸入空白鍵)。
例如，當您的答案為 $3+\sqrt{5}$ ，則請輸入 $3,1,5$)。
- 在您完成考試作答後，第一部份的試題您最後必須點選“send”，第二部份的試題您必須將您的答案卷拍照或掃描後上傳至指定的網址。

Traditional Chinese Version
正體中文版

隊名： _____ 姓名： _____ 編號： _____



Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)

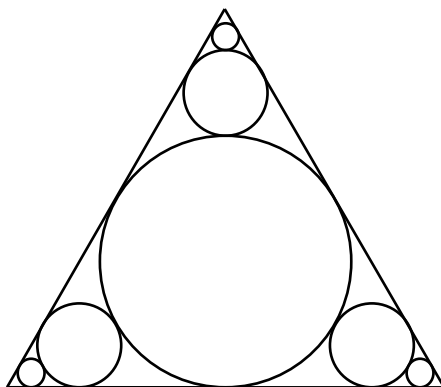
Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽

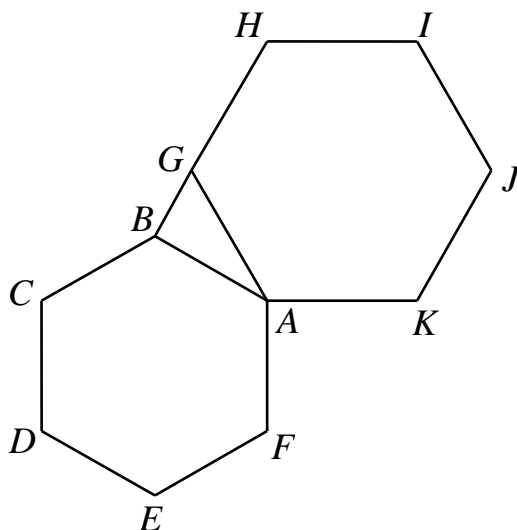
第一部份：

填充題，請將答案填寫在題末所附的空格內，共十二題，每題 5 分。

1. 已知 x 是實數，且知 $y = \sqrt{3x+4} + \sqrt{4-3x}$ ，請問 y^2 的最小可能值是什麼？
2. 一個半徑為 1 cm 的圓與一個等邊三角形的三邊都相切。從這個圓開始，然後繪製三個無限小圓序列，每個角一個，使得每個圓都與序列中的前一個圓以及三角形的兩條邊相切，如圖所示。請問所有圓的周長之和為多少 cm？(取 $\pi = 3.14$)

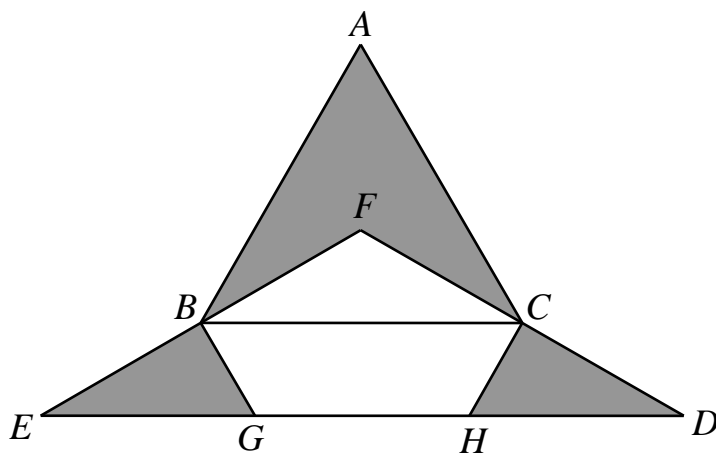


3. 若 $ABCDEF$ 與 $AGHIJK$ 為不重疊的兩個正六邊形，如圖所示。假設 $\angle FAK = 90^\circ$ 並且滿足面積關係： $3 \times [AGHIJK] = 4 \times [ABCDEF]$ 。請問 $[ABG]:[AGHIJK]$ 為何？(註： $[P]$ 表示多邊形 P 的面積)



青少年數學國際城市邀請賽

4. 以下的 53 位數
37,984,318,966,591,152,105,649,545,470,741,788,308,402,068,827,142,719
可以寫成 n^{21} 的形式，其中 n 是正整數。請問 n 之值為何？
5. 考慮方程 $10y^2 - 9x^{2022} = y^4$ ，其中 x, y 為整數。假設 m 是 $x+y$ 的最大可能值， n 是解 (x, y) 的數量，請問 $m+n$ 之值為何？
6. 已知非零實數 a, b, c 滿足 $a+b+c=0$ 。
請問 $S = \frac{a^4}{a^4 - (b^2 - c^2)^2} + \frac{b^4}{b^4 - (c^2 - a^2)^2} + \frac{c^4}{c^4 - (a^2 - b^2)^2}$ 之值為何？
7. 如果一個數可以寫成 $2^a + 2^b$ ，其中 a, b 為不同的非負整數，那麼稱這個數為「幸運數」。將所有幸運數以遞增方式列出，請問第 64 個幸運數是什麼？
8. 已知等邊三角形 ABC 的面積為 36 cm^2 ，且知等腰三角形 EFD 中， $EF = FD$ ，點 F 是三角形 ABC 的中心，並且點 B 與點 C 分別位於 EF 與 FD 的中點，如圖所示。若 $BG \perp EF$ 且 $CH \perp DF$ ，請問陰影部分的面積是多少 cm^2 ？



9. 一家神秘的公司開發了一個先進機器，它需要 20 份不同的藍圖來建造。每位員工可以獲得恰好 5 份不同的藍圖，並且任何 5 份不同的藍圖都至少有一位員工可以獲得。公司總經理想要將員工分成一些部門，使得沒有哪一個部門可以獨自建造此機器。也就是說，沒有任何一個部門能從該部門的至少一位員工中得到每一份藍圖。請問公司總經理最少需要組成幾個部門？

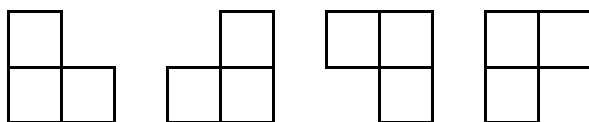


Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

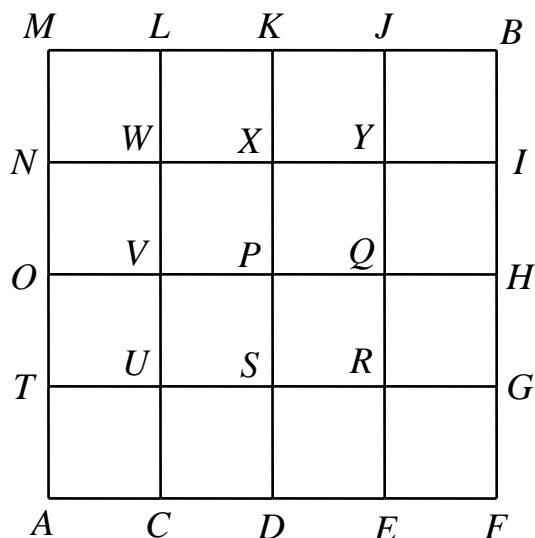
青少年數學國際城市邀請賽

10. 一片 V 形三方塊是由 3 個 1×1 正方形構成，如下圖所示：



所有 V 形三方塊必須與方格表的格線吻合，請問在一個 8×8 方格表內至少要放入多少片 V 形三方塊才能使得剩下的空位無法再放入一片 2×2 的正方形？

11. 有 17 個空盒子以及無窮多個球。每一步，選擇其中一些盒子，然後在每個盒子裡放入不同個數的球，放入的球的數量都必須是 2 的非負整數次冪。經過 k 步之後，使得所有的盒子內都有相同非零數量的球，請問正整數 k 的最小值是什麼？
12. 下圖所示是一個形成 4×4 方陣的地下迷宮。一條初始位置在 P 點的蛇，沿著 $P-Q-R-S$ 的路徑循環爬行。一隻老鼠從點 A 開始沿著格線想爬到點 B 。老鼠每次只能向上或者向右爬行。老鼠與蛇的爬行速度相同，如果老鼠與蛇同時出現在同一點，則蛇會吃掉老鼠。已知老鼠與蛇同時出發，請問老鼠從點 A 爬到點 B 共有多少條安全路徑？(例如： $A-C-D-E-R-G-H-I-B$ 是一條安全路徑，因為當老鼠到達 R 時，蛇爬行的路徑為 $P-Q-R-S-P$)





*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*
Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽

隊名：_____ 姓名：_____ 編號：_____

第二部份：

計算與證明題，請在題目下空白處寫出計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. 請問方程 $x^2 - 8[x] + 7 = 0$ 有多少個實數解？

(注意： $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數。例如， $[3.14] = 3$ 而 $[-3.14] = -4$ 。)

答：_____ 個



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*
Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽

隊名：_____ 姓名：_____ 編號：_____

2. 在一個正六邊形上，小羅想要將每個頂點塗成紅、藍、綠之一的顏色，使得任何兩個相鄰的頂點之間的顏色不同。請問小羅共有多少種塗色方法？

答：_____ 種



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*
Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽

隊名： _____ 姓名： _____ 編號： _____

3. 在三角形 ABC 中，點 M 為 BC 中點。已知圓 O 經過點 A 與點 C ，且與直線 AM 相切。設 BA 的延長線與圓 O 相交於點 D ， CD 的延長線與 MA 相交於點 P ，如圖所示。請證明： $OP \perp BC$ 。

