Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛

队际赛试题

答题时间：70 分钟

答题指引:

- 队际赛试题答题时间共 70 分钟，共 10 页，每页一题。
  第 1、3、5、7、9 题的答案仅须填写阿拉伯数值；(中文数字不予计分)
  第 2、4、6、8、10 题必须填写详细计算过程或证明。
- 每道题目 40 分。奇数题号的题目，没有部分分数，答错不倒扣分数。您所填入的答案个数不得多于所要求的答案个数。若题目有不只一个答案，则全部答对才给分。偶数题号的题目，将根据答题情况给予部份分数。
- 题目中所提供之图形只是示意图，不一定精准。

作答须知:

- 请在本页的对应位置填写您的队名、姓名及编号。
  请在每一页上的对应位置填写您的队名。
- 不得使用任何计算器具、电子仪器与量角器。
- 对于奇数题号的试题，请将答案填写在答案卷所附的空格内。在网络上填写您的答案时，所有的题目都**不必填写单位**。填答的格式如下：
  1. 若您的答案为 $a.bc$，其中 a、b 与 c 都是数码，则输入 $a.bc$。
  2. 若您的答案为分数 $\frac{a}{b}$，其中 a 与 b 互质，则输入 a/b (例如，当您的答案为 $3\frac{2}{5}$，则请输入 **17/5**)。
  3. 若您的答案为比 $a:b$，则输入 $a:b$ 或 $a;b$ (在“:”或“;”之后不要输入空格键).
  4. 若您的答案为数组$(a, b, c, \ldots)$，则输入 $a,b,c,\ldots$(在“,”之后不要输入空格键).
  5. 若您的答案为 $a+b\times\sqrt{c}$，则输入 a,b,c (在“,”之后不要输入空格键。
     例如，**当您的答案为** $3+\sqrt{5}$，**则请输入 3,1,5**).
- 对于偶数题号的试题，请将详细计算过程或证明填写在每一张题目卷所附的空格内或背面空白处。
- 在一开始的 10 分钟内，四名队员允许互相讨论与分配前八题，每位队员至少要解答一题。
- 在接下来的 35 分钟内，四名队员仅允许在所分配到的题目卷上作答，不可以再交换题目或讨论。
- 在最后的 25 分钟内，四名队员可一起合作在最后两题的题目卷上作答。
- 在您完成考试作答后，奇数题号的试题您最后必须点选“send”，偶数题号的试题您必须将您的答案卷拍照或扫描后上传至指定的网址。

Simplified Chinese Version

简体中文版

队名: _____

Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛

队际赛试题

3rd July, 2023, Bulgaria

队名：_____ 解题人：_____ ID：_____

1. 设 p、q、r 为方程 $x^3-9x^2+11x-1=0$ 的非负实根。若 $s=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$，请问 $|s^4-18s^2-8s|$ 之值为何？

答: _____

Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

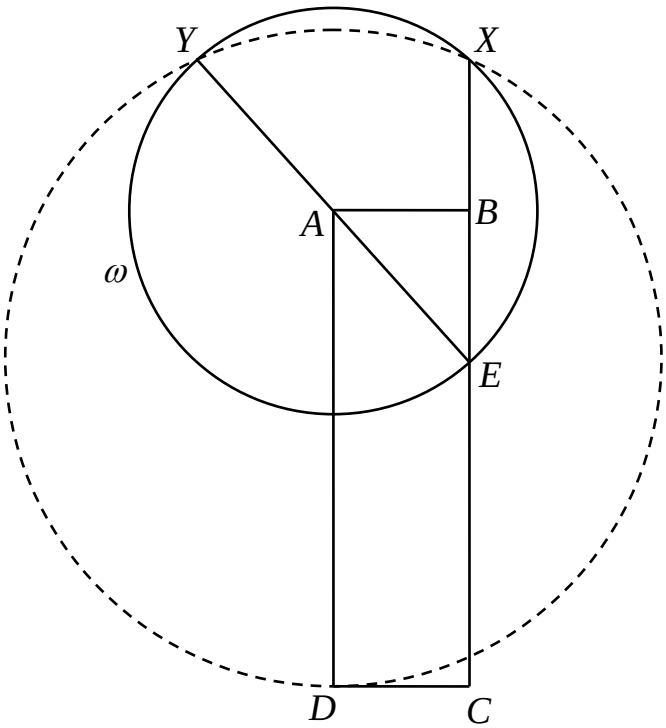
青少年数学国际城市邀请赛

队际赛试题

3rd July, 2023, Bulgaria

队名：_____ 解题人：_____ ID：_____

2. 已知 $ABCD$ 为矩形，点 E 在线段 BC 上，圆心在点 A 的圆 ω 经过点 E。EB 的延长线与 ω 相交于点 X 而 EA 的延长线与 ω 相交于点 Y，如下图所示。证明：DC 与经过点 Y、X、D 的圆相切。



Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

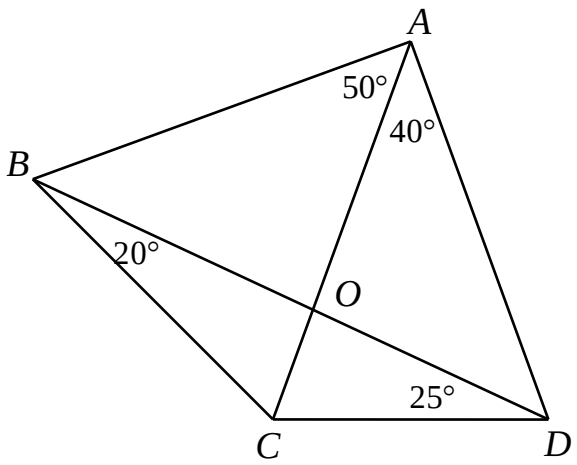
青少年数学国际城市邀请赛

队际赛试题

3rd July, 2023, Bulgaria

队名：_____ 解题人：_____ ID：_____

3. 在给定的凸四边形 $ABCD$ 中，有 $\angle CAD = 40°$、$\angle BAC = 50°$、$\angle CBD = 20°$ 以及 $\angle CDB = 25°$，如图所示。若点 O 为 AC 与 BD 的交点，请问 $\angle AOB$ 为多少度？



°

答: _____

Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛

队际赛试题

3rd July, 2023, Bulgaria

队名：_____ 解题人：_____ ID：_____

4. 小丁将一些珠子放入 100 个黑色的袋子内，袋子分别标号为 1 到 100。每个回合，您可以询问小丁任何 15 个相异的袋子内珠子数之总和的奇偶性。请问您最少需要询问小丁几个回合才能确定 1 号袋子内珠子数量的奇偶性？请给出一个询问方式，并证明您的结论。

答: _____ 回合

Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

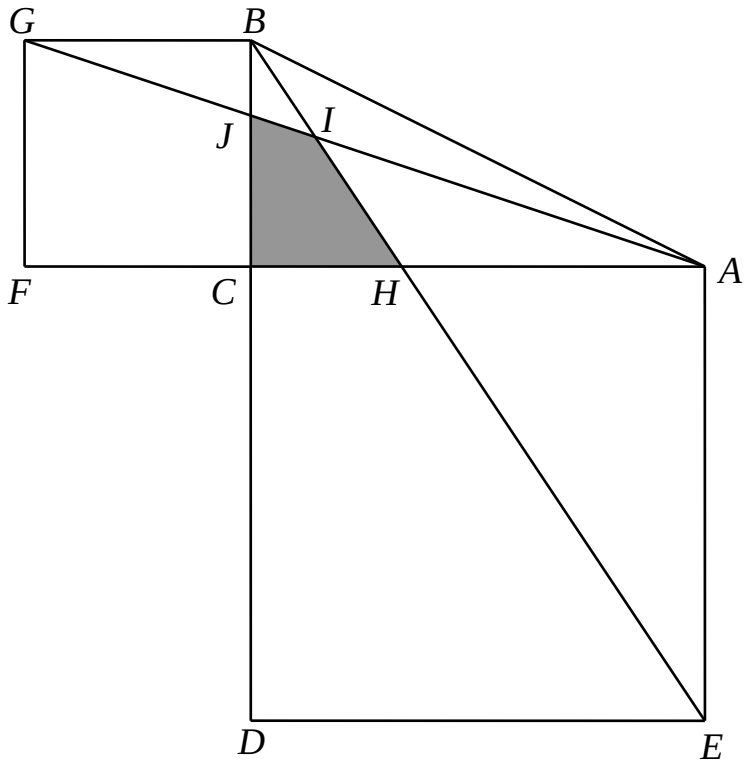
青少年数学国际城市邀请赛

队际赛试题

3rd July, 2023, Bulgaria

队名：_____ 解题人：_____ ID：_____

5. 已知三角形 ABC 是一个直角三角形，其中 $\angle C = 90°$、$AC = 28$ cm 以及 $BC = 14$ cm。正方形 $ACDE$ 与 $BCFG$ 为三角形 ABC 外部的正方形，令 BE 与 AC 交于点 H、与 AG 交于点 I 而 AG 与 BC 交于点 J，如图所示。请问四边形 $CHIJ$ 的面积是多少 cm^2?



答: _____ cm^2

Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛

队际赛试题

3rd July, 2023, Bulgaria

队名：_____ 解题人：_____ ID：_____

6. 求最小的正整数 d，使得存在一个无限多项的等差数列，满足下列性质：
   - 数列的每一项为正整数。
   - 数列的公差为 d。
   - 数列的项都不出现在斐波那契数列中。

   (斐波那契数列的定义为$F_1=1$、$F_2=1$、$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$，$n\geq 1$)

答: _____

Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛

队际赛试题

3rd July, 2023, Bulgaria

队名：_____ 解题人：_____ ID：_____

7. 我们称一个完全平方数 N 为一个「BIMC 数」，如果存在三个正整数 a、b、c，其中 $a<b<c$，使得 $N=(b-a)(c-a)(c-b)=ab+ac+bc$。

例如，230400 为一个 BIMC 数，这是由于 $230400=480\times480$ 而且 $230400=(288-224)(324-224)(324-288)=224\times288+224\times324+288\times324$.

请问最小的 BIMC 数是什么?

答: _____

Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛

队际赛试题

3rd July, 2023, Bulgaria

队名：_____ 解题人：_____ ID：_____

8. 小蒂想要在一个单位正方形内放入 1600 个点，使得每一个面积为 $\frac{1}{200}$ 且边平行于正方形的边之矩形内都至少有一个放入的点。请问小蒂是否可能达成目的？如果您的回答是肯定的，请给出一个例子。如果您的回答是否定的，请证明不可能。

答: _____

Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛

队际赛试题

3rd July, 2023, Bulgaria

队名：_____ 解题人：_____ ID：_____

9. 请问有多少个数码互不相同的 7 位数且**不是** 9 的倍数？

答: _____

Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

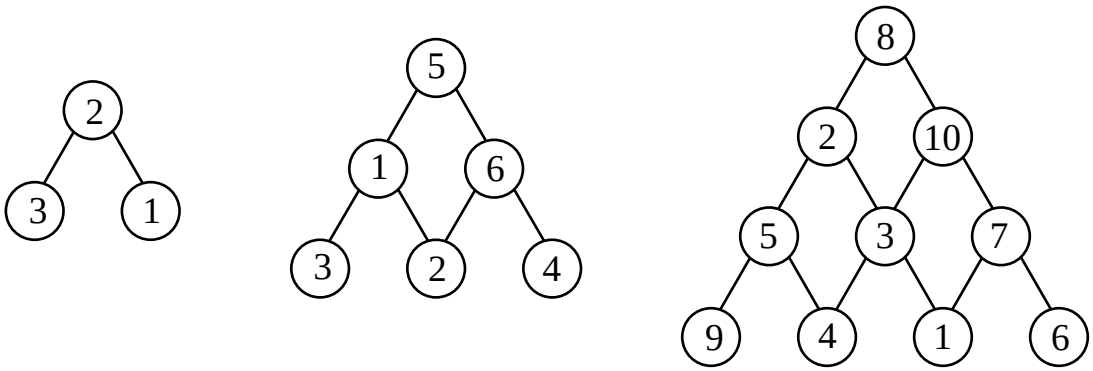
青少年数学国际城市邀请赛

队际赛试题

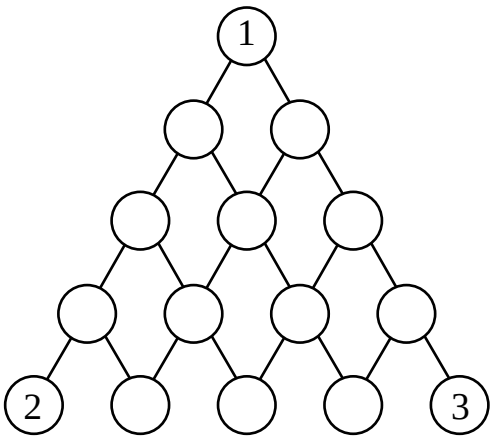
3rd July, 2023, Bulgaria

队名：_____ 解题人：_____ ID：_____

10. 如果将从 1 到 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的整数排成一个正三角阵，使得除了最下行的 n 个数，每个数都是它正下方两个数的差之绝对值或和，则我们将这个三角形称为 n 阶智慧三角形。下图分别是 2、3、4 阶的智慧三角形。



(a) 请问是否存在 5 阶智慧三角形，使得 1, 2, 3 分别填入在如图所示的位置。如果您的回答是肯定的，請给出一个例子。如果您的回答是否定的，請证明不可能。(10 分)



(b) 请问是否存在 6 阶智慧三角形？如果您的回答是肯定的，請给出一个例子。如果您的回答是否定的，請证明不可能。(30 分)

Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年数学国际城市邀请赛

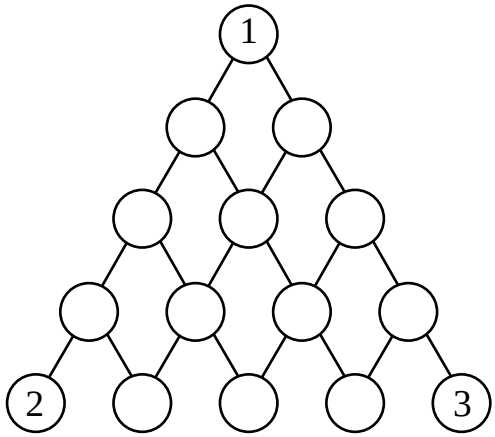
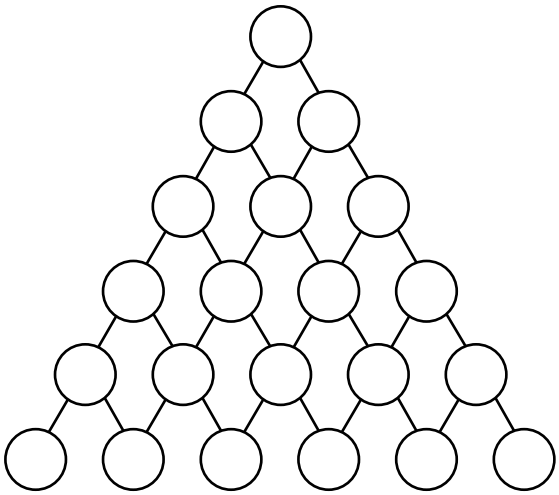
队际赛试题

3rd July, 2023, Bulgaria

队名：_____ 解题人：_____ ID：_____

10. 答:

(a) ☐ 我的答案是**存在**。
右图为我的例子。
☐ 我的答案是**不存在**，证明如下：



(b) ☐ 我的答案是**存在**。
右图为我的例子。
☐ 我的答案是**不存在**，证明如下：