



Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽

隊際賽試題

答題時間：70 分鐘

答題指引：

- 隊際賽試題答題時間共 70 分鐘，共 10 頁，每頁一題。
第 1、3、5、7、9 題的答案僅須填寫阿拉伯數值；(中文數位不予計分)
第 2、4、6、8、10 題必須填寫詳細計算過程或證明。
- 每道題目 40 分。奇數題號的題目，沒有部分分數，答錯不倒扣分數。您所填入的答案個數不得多於所要求的答案個數。若題目有不只一個答案，則全部答對才給分。偶數題號的題目，將根據答題情況給予部份分數。
- 題目中所提供之圖形只是示意圖，不一定精準。

作答須知：

- 請在本頁的對應位置填寫您的隊名、姓名及編號。
請在每一頁上的對應位置填寫您的隊名。
- 不得使用任何計算器具、電子儀器與量角器。
- 對於奇數題號的試題，請將答案填寫在答案卷所附的空格內。在網路上填寫您的答案時，所有的題目**都不必填寫單位**。填答的格式如下：
 1. 若您的答案為 $a.bc$ ，其中 a 、 b 與 c 都是數碼，則輸入 $a.bc$ 。
 2. 若您的答案為分數 $\frac{a}{b}$ ，其中 a 與 b 互質，則輸入 a/b (例如，當您的答案為 $3\frac{2}{5}$ ，則請輸入 17/5)。
 3. 若您的答案為比 $a:b$ ，則輸入 $a:b$ 或 $a;b$ (在“:”或“;”之後不要輸入空白鍵)。
 4. 若您的答案為陣列 $(a, b, c, \dots)$ ，則輸入 $a,b,c,\dots$ (在“,”之後不要輸入空白鍵)。
 5. 若您的答案為 $a + b \times \sqrt{c}$ ，則輸入 a,b,c (在“,”之後不要輸入空白鍵)。
例如，當您的答案為 $3 + \sqrt{5}$ ，則請輸入 3,1,5)。
- 對於偶數題號的試題，請將詳細計算過程或證明填寫在每一張題目卷所附的空格內或背面空白處。
- 在一開始的 10 分鐘內，四名隊員允許互相討論與分配前八題，每位隊員至少要解答一題。
- 在接下來的 35 分鐘內，四名隊員僅允許在所分配到的題目卷上作答，不可以再交換題目或討論。
- 在最後的 25 分鐘內，四名隊員可一起合作在最後兩題的題目卷上作答。
- 在您完成考試作答後，奇數題號的試題您最後必須點選“send”，偶數題號的試題您必須將您的答案卷拍照或掃描後上傳至指定的網址。

Traditional Chinese Version

正體中文版

隊名：



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽
隊際賽試題

3rd July, 2023, Bulgaria

隊名：_____ 解題人：_____ ID：_____

1. 設 p 、 q 、 r 為方程 $x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 0$ 的非負實根。若 $s = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ ，請問 $|s^4 - 18s^2 - 8s|$ 之值為何？

答：_____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

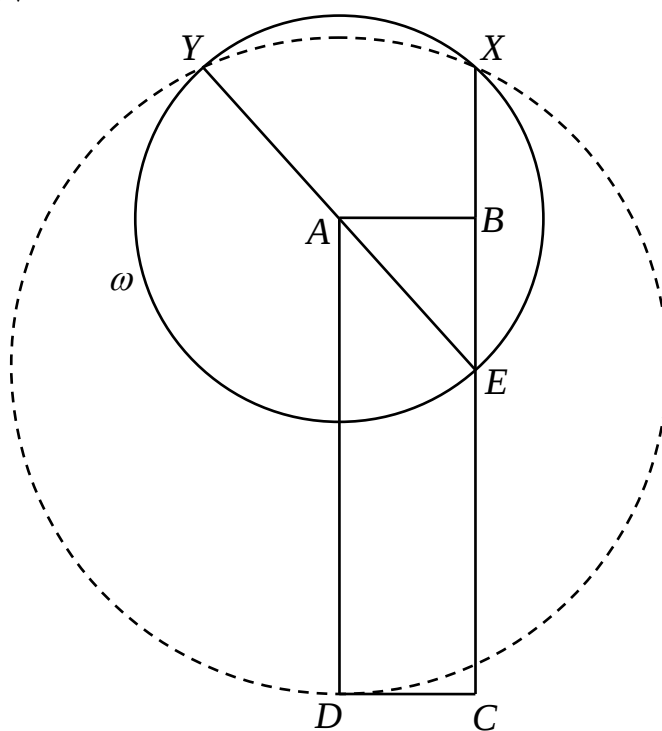
Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽
隊際賽試題

3rd July, 2023, Bulgaria

隊名：_____ 解題人：_____ ID：_____

2. 已知 $ABCD$ 為矩形，點 E 在線段 BC 上，圓心在點 A 的圓 ω 經過點 E 。 EB 的延長線與 ω 相交於點 X 而 EA 的延長線與 ω 相交於點 Y ，如下圖所示。
證明： DC 與經過點 Y 、 X 、 D 的圓相切。





*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

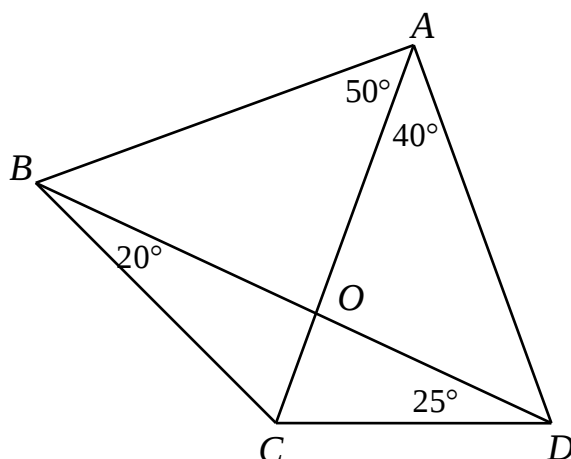
Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽
隊際賽試題

3rd July, 2023, Bulgaria

隊名：_____ 解題人：_____ ID：_____

3. 在給定的凸四邊形 $ABCD$ 中，有 $\angle CAD = 40^\circ$ 、 $\angle BAC = 50^\circ$ 、 $\angle CBD = 20^\circ$ 以及 $\angle CDB = 25^\circ$ ，如圖所示。若點 O 為 AC 與 BD 的交點，請問 $\angle AOB$ 為多少度？



○

答：_____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽
隊際賽試題

3rd July, 2023, Bulgaria

隊名：_____ 解題人：_____ ID：_____

4. 小丁將一些珠子放入 100 個黑色的袋子內，袋子分別標號為 1 到 100。每個回合，您可以詢問小丁任何 15 個相異的袋子內珠子數之總和的奇偶性。請問您最少需要詢問小丁幾個回合才能確定 1 號袋子內珠子數量的奇偶性？請給出一個詢問方式，並證明您的結論。

答：_____ 回合



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

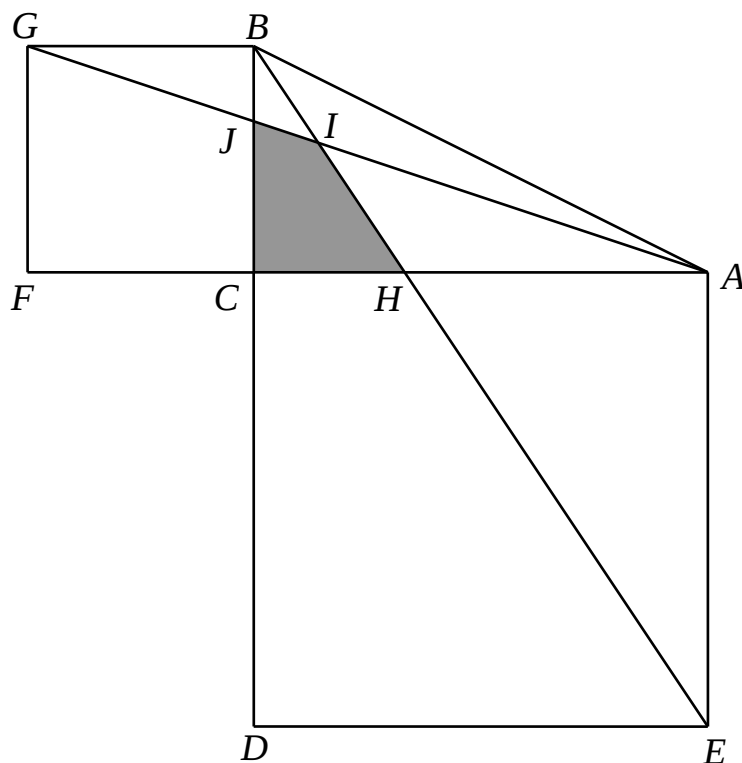
Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽
隊際賽試題

3rd July, 2023, Bulgaria

隊名：_____ 解題人：_____ ID：_____

5. 已知三角形 ABC 是一個直角三角形，其中 $\angle C = 90^\circ$ 、 $AC = 28\text{ cm}$ 以及 $BC = 14\text{ cm}$ 。正方形 $ACDE$ 與 $BCFG$ 為三角形 ABC 外部的正方形，令 BE 與 AC 交於點 H 、與 AG 交於點 I 而 AG 與 BC 交於點 J ，如圖所示。請問四邊形 $CHIJ$ 的面積是多少 cm^2 ？



答：_____ cm^2



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽
隊際賽試題

3rd July, 2023, Bulgaria

隊名：_____ 解題人：_____ ID：_____

6. 求最小的正整數 d ，使得存在一個無限多項的等差數列，滿足下列性質：

- 數列的每一項為正整數。
- 數列的公差為 d 。
- 數列的項都不出現在斐波那契數列中。

(斐波那契數列的定義為 $F_1=1$ 、 $F_2=1$ 、 $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$ ， $n \geq 1$)

答：_____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽
隊際賽試題

3rd July, 2023, Bulgaria

隊名：_____ 解題人：_____ ID：_____

7. 我們稱一個完全平方數 N 為一個「BIMC 數」，如果存在三個正整數 a 、 b 、 c ，其中 $a < b < c$ ，使得 $N = (b-a)(c-a)(c-b) = ab + ac + bc$ 。
- 例如，230400 為一個 BIMC 數，這是由於 $230400 = 480 \times 480$ 而且 $230400 = (288 - 224)(324 - 224)(324 - 288) = 224 \times 288 + 224 \times 324 + 288 \times 324$ 。
- 請問最小的 BIMC 數是什麼？

答：_____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽
隊際賽試題

3rd July, 2023, Bulgaria

隊名：_____ 解題人：_____ ID：_____

8. 小蒂想要在一個單位正方形內放入 1600 個點，使得每一個面積為 $\frac{1}{200}$ 且邊平行於正方形的邊之矩形內都至少有一個放入的點。請問小蒂是否可能達成目的？如果您的回答是肯定的，請給出一個例子並證明滿足條件。如果您的回答是否定的，請證明不可能。

答：_____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽
隊際賽試題

3rd July, 2023, Bulgaria

隊名：_____ 解題人：_____ ID：_____

9. 請問有多少個數碼互不相同的 7 位數且不是 9 的倍數？

答：_____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

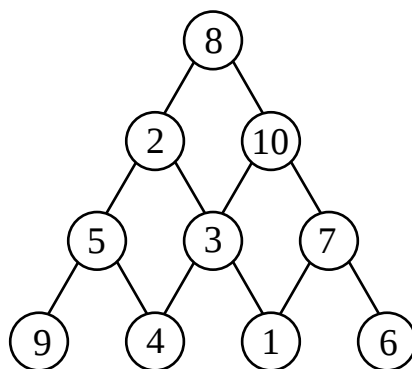
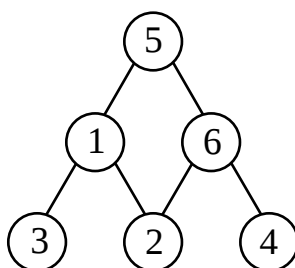
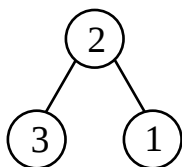
Bulgaria, 1st to 7th July 2023

青少年數學國際城市邀請賽
隊際賽試題

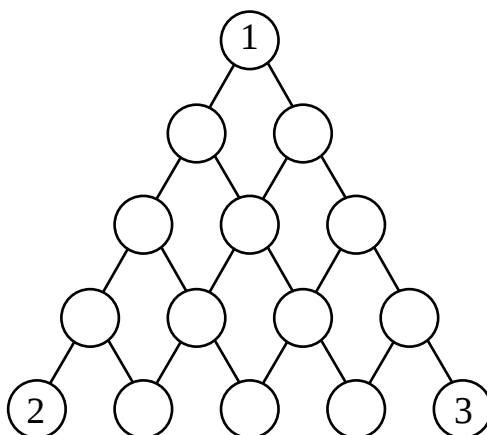
3rd July, 2023, Bulgaria

隊名：_____ 解題人：_____ ID：_____

10. 如果將從 1 到 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的整數排成一個正三角陣，使得除了最下行的 n 個數，每個數都是它正下方兩個數的差之絕對值或和，則我們將這個三角形稱為 n 階智慧三角形。下圖分別是 2、3、4 階的智慧三角形。



- (a) 請問是否存在 5 階智慧三角形，使得 1、2、3 分別填入在如圖所示的位置。如果您的回答是肯定的，請給出一個例子。如果您的回答是否定的，請證明不可能。(10 分)



- (b) 請問是否存在 6 階智慧三角形？如果您的回答是肯定的，請給出一個例子。如果您的回答是否定的，請證明不可能。(30 分)



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1st to 7th July 2023

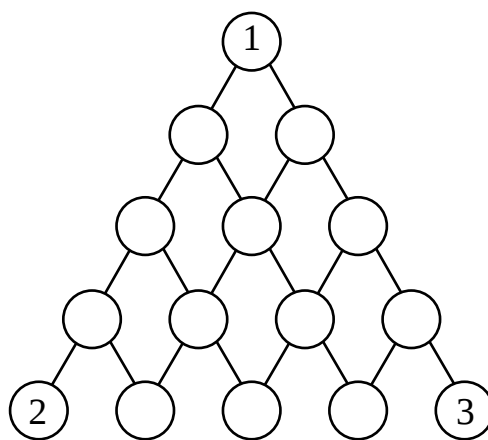
青少年數學國際城市邀請賽
隊際賽試題

3rd July, 2023, Bulgaria

隊名：_____ 解題人：_____ ID：_____

10. 答:

- (a) ☐ 我的答案是存在。
右圖為我的例子。
☐ 我的答案是不存在，證明如下：



- (b) ☐ 我的答案是存在。
右圖為我的例子。
☐ 我的答案是不存在，證明如下：

