



India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26th to 31st July 2024

青少年数学国际城市邀请赛

个人赛试题

答题时间：120 分钟

答题指引：

- 个人赛试题答题时间共 120 分钟，包括两个部份：
第一部份包括填充题 12 题，只须填写阿拉伯数值答案(中文数字不予计分)；
第二部份包括计算与证明题 3 题，必须填写详细计算过程或证明。
- 第一部份每道题目 5 分，没有部分分数，答错不倒扣分数。您所填入的答案个数不得多于所要求的答案个数。若题目有不只一个答案，则全部答对才给分。
第二部份每道题目 20 分，将根据答题情况给予部份分数。
- 题目中所提供之图形只是示意图，不一定精准。

作答须知：

- 请在第一部分答案卷与第二部分题目卷的对应位置填写您的队名、姓名及编号。
- 第一部份填充题，请将答案填写在第一部分答案卷所附的空格内。
第二部份计算与证明题，请在题目下空白处写出计算或证明过程。
- 可使用铅笔、蓝色或黑色原子笔作答。
- 不得使用任何计算器具、电子仪器与量角器。
- 答题结束后，请将您的题目卷、答案卷与所有草稿纸装入信封并交由监试人员收回。

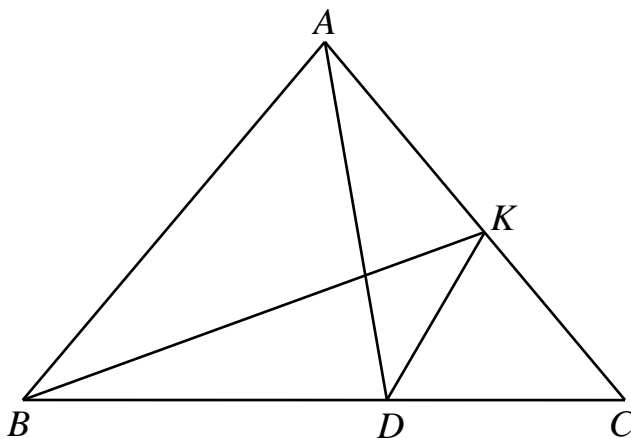
Simplified Chinese Version

简体中文版

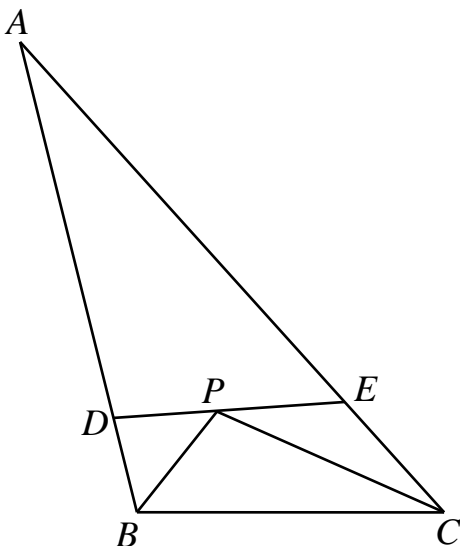
第一部份：

填充题，请将答案填写在答案卷对应的空格内，共十二题，每题 5 分。

1. 令 $N = \frac{1^4 + 2022^4 + 2023^4}{1^2 + 2022^2 + 2023^2}$ ，请问 N 除以 2024 的余数是什么？
2. 令正实数 a 与 b 满足 $\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+a^2} = \frac{7}{8}$ 且 $ab = 2$ ，请问 $a^9 + b^9$ 的值是什么？
3. 已知正整数 a 与 b 满足 $(a+1)(a+2)(a+3)\dots(a+b) = 2527k$ ，其中 k 是正整数，请问 $a+b$ 的最小可能值是什么？
4. 在等腰三角形 ABC 中，已知 $AB = AC$ 且 $\angle BAC = 80^\circ$ ，如下图所示。若点 D 与 K 分别在 BC 与 AC 上，满足 $\angle CAD = \angle ABK = 30^\circ$ ，请问 $\angle BKD$ 为多少度？



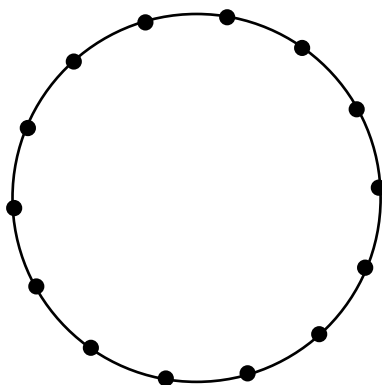
5. 令 α 与 β 为方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个根，请问 $\alpha^9 + 13\alpha^8\beta^9 + \beta^8$ 的值是什么？
6. 在三角形 ABC 中， $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的内角平分线交于点 P ，若点 D 与 E 分别在边 AB 与 AC 上，满足 DE 经过点 P ，并且 $\angle AED = \angle ABP$ ，如下图所示。如果三角形 BDP 、 CEP 、 BPC 的面积分别为 18 cm^2 、 36 cm^2 、 57 cm^2 ，请问三角形 ABC 的面积是多少 cm^2 ？



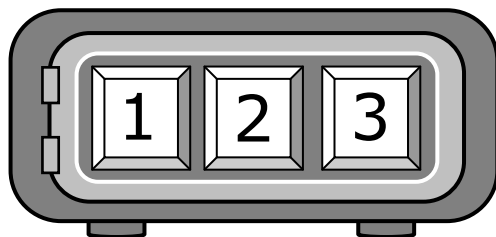
7. 使用三个不同的数码 A 、 B 、 C 各恰一次，共可以得到 6 个不同的三位数。在这些三位数中已知：
- 恰有一个数可被 16 整除；
 - 除了上面的数，只有一个数可被 4 整除；
 - 除了上面的两个数，只有两个数可被 2 整除；
 - 其中的一个数是质数；
 - 其中的一个数等于一个质数的平方。

请问使用数码 A 、 B 、 C 各恰一次所构成的最大三位数是什么？

8. 如下图所示，圆上有 14 个点。请问有多少种方法可以将这些点配对连接，从而得到 7 条互不相交的弦？（注意：这些弦也不能有公共的端点。）



9. 我父亲的保险箱设有密码保护，只有输入由数码为 1、2、3 组合的三位数密码才能解锁。



只有当对应密码的三个数码按钮被连续依次按下后，保险箱才会被打开。例如，如果依次按下 1、2、3、1、2，则密码为 312 的保险箱可被打开。

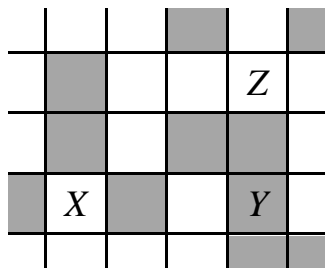
我妈妈不知道保险箱的密码，但是她想要打开保险箱。请问她至少要按下多少次按钮，才能保证能打开保险箱？注意：输入保险箱密码时不需要按【确定】。

10. 对任一个正实数 x ，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，用 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分，即 $\{x\} = x - [x]$ 。设正实数 a, b, c 满足下面的方程组：

$$\begin{cases} a + 2[b] + 2\{c\} = 4.6 \\ [a] + \{b\} - c = 1 \\ 2\{a\} + 2b + [c] = 4.5 \end{cases}$$

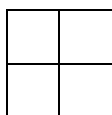
请问 $a + b + c$ 的最大可能值是什么？

11. 在一个无限大的方格表中，每个单位小方格被涂成了白色或灰色。若方格 X 与 Y 在同一行， Y 与 Z 在同一列，且 X 与 Z 为白色， Y 为灰色，则 (X, Y, Z) 被称作“*IMC* 三角形”。例如，下面的方格表中， (X, Y, Z) 是一个 *IMC* 三角形。



请问在一个 15×15 的方格表中最多可能有多少个“*IMC* 三角形”？

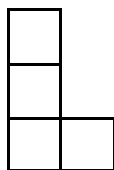
12. 将一个无限大的方格表上的每一个小方格都填上一个数码。小莎在该方格表上沿着格线放置一片下图所示的 *O* 型四方块，它可以覆盖四个小方格：



无论这一片 *O* 型四方块放在哪一个位置，在此无限大的方格表上至少需要填入 4 个相异的数码，才能使得所覆盖的四个小方格上的数码都不相同。下图为其中一种填入数码的方式：

	1	2	1	2	1	2	1	2
	3	4	3	4	3	4	3	4
	1	2	1	2	1	2	1	2
	3	4	3	4	3	4	3	4
	1	2	1	2	1	2	1	2
	3	4	3	4	3	4	3	4
	1	2	1	2	1	2	1	2
	3	4	3	4	3	4	3	4

若小莎在这个方格表上放置一片 *L* 型四方块并沿着格线覆盖四个小方格，请问在此无限大的方格表上必须至少填入多少个相异的数码才能使得能被这片 *L* 型四方块覆盖的任意四个小方格始终都是不同的数码？



L 型四方块



India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26th to 31st July 2024

青少年数学国际城市邀请赛

队名: _____ 姓名: _____ 编号: _____

第二部份:

计算与证明题, 请在题目下空白处写出计算或证明过程。共三题, 每题 20 分。

1. 考虑以下有限数列: $\sqrt{1}$ 、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、...、 $\sqrt{2023}$ 、 $\sqrt{2024}$, 并进行如下操作:
每一步, 都从中选择两个数, 记为 x 与 y , 删去这两个数, 并用以下一个新数替代

$$z = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2y^2}}}$$

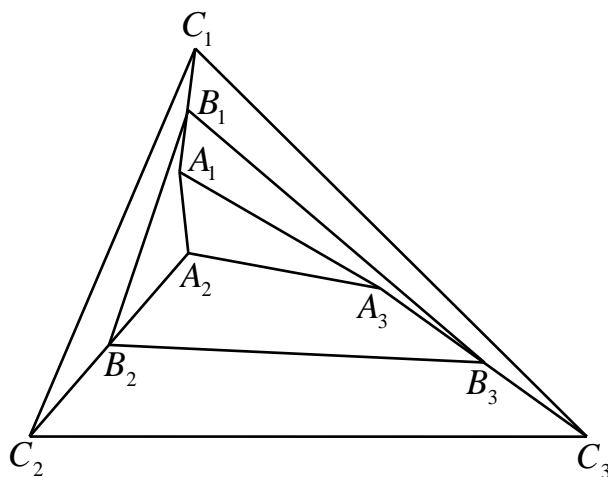
操作 2023 步之后, 我们将只剩一个数。请问这个数是什么?

答 : _____

青少年数学国际城市邀请赛

队名: _____ 姓名: _____ 编号: _____

2. 三个三角形 $A_1A_2A_3$ 、 $B_1B_2B_3$ 、 $C_1C_2C_3$ 满足 $A_1A_2A_3$ 在 $B_1B_2B_3$ 内部, $B_1B_2B_3$ 在 $C_1C_2C_3$ 内部, 其中 B_i 为 A_iC_i 的中点, $1 \leq i \leq 3$, 如下图所示。



如果 $A_1A_2A_3$ 与 $C_1C_2C_3$ 的周长分别为 a cm 与 c cm, 请问 $B_1B_2B_3$ 的周长的最大可能值是多少 cm?

答 : _____ cm

青少年数学国际城市邀请赛

队名: _____ 姓名: _____ 编号: _____

3. 小安与小柏二人玩一个算数游戏，他们从一张纸上只有一个数 2024 开始。由小安为先手，二人轮流在这张纸上写下一个正整数，使得写下的数要比对方刚刚写的数小，但是至少是对方刚刚写的数的三分之一。第一步时，小安的可以写下比 2024 小，但是不小于 $\frac{2024}{3}$ 的一个正整数。最后能写下 1 的玩家获胜。请问谁有必胜策略(确定并证明)? 他的必胜策略是什么?

答 : _____ 有必胜策略