



India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26th to 31st July 2024

青少年數學國際城市邀請賽

個人賽試題

答題時間：120 分鐘

答題指引：

- 個人賽試題答題時間共 120 分鐘，包括兩個部份：
第一部份包括填充題 12 題，只須填寫阿拉伯數值答案(中文數字不予計分)；
第二部份包括計算與證明題 3 題，必須填寫詳細計算過程或證明。
- 第一部份每道題目 5 分，沒有部分分數，答錯不倒扣分數。您所填入的答案個數不得多於所要求的答案個數。若題目有不只一個答案，則全部答對才給分。
第二部份每道題目 20 分，將根據答題情況給予部份分數。
- 題目中所提供之圖形只是示意圖，不一定精準。

作答須知：

- 請在第一部分答案卷與第二部分題目卷的對應位置填寫您的隊名、姓名及編號。
- 第一部份填充題，請將答案填寫在第一部分答案卷所附的空格內。
第二部份計算與證明題，請在題目下空白處寫出計算或證明過程。
- 可使用鉛筆、藍色或黑色原子筆作答。
- 不得使用任何計算器具、電子儀器與量角器。
- 答題結束後，請將您的題目卷、答案卷與所有草稿紙裝入信封並交由監試人員收回。

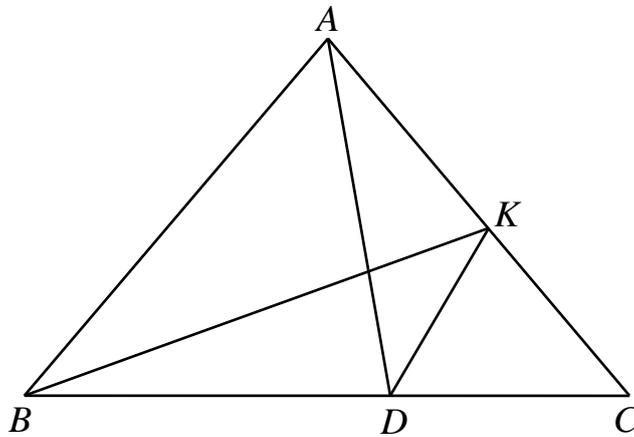
Traditional Chinese Version

正體中文版

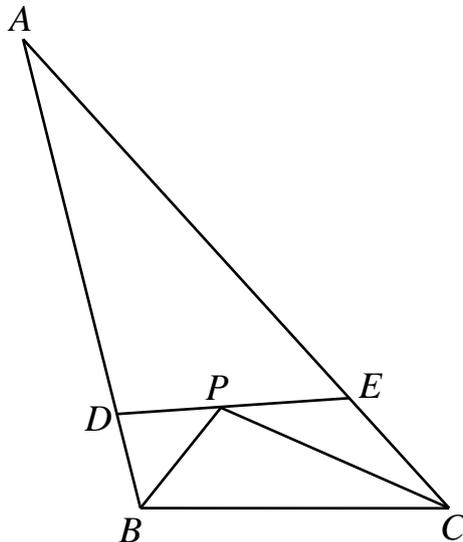
第一部份：

填充題，請將答案填寫在答案卷對應的空格內，共十二題，每題 5 分。

1. 令 $N = \frac{1^4 + 2022^4 + 2023^4}{1^2 + 2022^2 + 2023^2}$ ，請問 N 除以 2024 的餘數是什麼？
2. 令正實數 a 與 b 滿足 $\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+a^2} = \frac{7}{8}$ 且 $ab=2$ ，請問 $a^9 + b^9$ 的值是什麼？
3. 已知正整數 a 與 b 滿足 $(a+1)(a+2)(a+3)\dots(a+b) = 2527k$ ，其中 k 是正整數，請問 $a+b$ 的最小可能值是什麼？
4. 在等腰三角形 ABC 中，已知 $AB=AC$ 且 $\angle BAC=80^\circ$ ，如下圖所示。若點 D 與 K 分別在 BC 與 AC 上，滿足 $\angle CAD = \angle ABK = 30^\circ$ ，請問 $\angle BKD$ 為多少度？



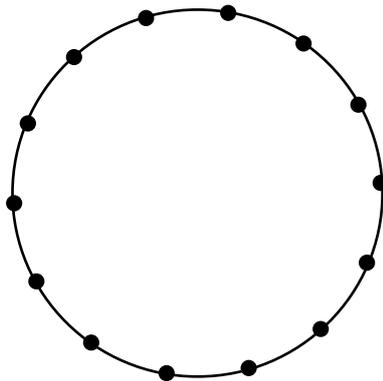
5. 令 α 與 β 為方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的兩個根，請問 $\alpha^9 + 13\alpha^8\beta^9 + \beta^8$ 的值是什麼？
6. 在三角形 ABC 中， $\angle ABC$ 與 $\angle ACB$ 的內角平分線交於點 P ，若點 D 與 E 分別在邊 AB 與 AC 上，滿足 DE 經過點 P ，並且 $\angle AED = \angle ABP$ ，如下圖所示。如果三角形 BDP 、 CEP 、 BPC 的面積分別為 18 cm^2 、 36 cm^2 、 57 cm^2 ，請問三角形 ABC 的面積是多少 cm^2 ？



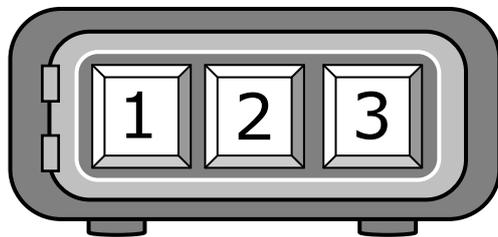
7. 使用三個不同的數碼 A 、 B 、 C 各恰一次，共可以得到 6 個不同的三位數。在這些三位數中已知：
- 恰有一個數可被 16 整除；
 - 除了上面的數，只有一個數可被 4 整除；
 - 除了上面的兩個數，只有兩個數可被 2 整除；
 - 其中的一個數是質數；
 - 其中的一個數等於一個質數的平方。

請問使用數碼 A 、 B 、 C 各恰一次所構成的最大三位數是什麼？

8. 如下圖所示，圓上有 14 個點。請問有多少種方法可以將這些點配對連接，從而得到 7 條互不相交的弦？（注意：這些弦也不能有公共的端點。）



9. 我父親的保險箱設有密碼保護，只有輸入由數碼為 1、2、3 組合的三位數密碼才能解鎖。



只有當對應密碼的三個數碼按鈕被連續依次按下後，保險箱才會被打開。例如，如果依次按下 1、2、3、1、2，則密碼為 312 的保險箱可被打開。

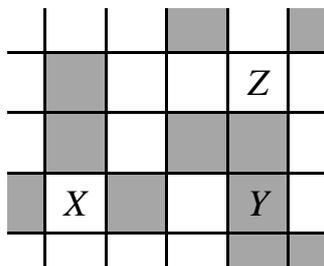
我媽媽不知道保險箱的密碼，但是她想要打開保險箱。請問她至少要按下多少次按鈕，才能保證能打開保險箱？注意：輸入保險箱密碼時不需要按【確定】。

10. 對任一個正實數 x ，用 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數，用 $\{x\}$ 表示 x 的小數部分，即 $\{x\} = x - [x]$ 。設正實數 a, b, c 滿足下面的方程組：

$$\begin{cases} a + 2[b] + 2\{c\} = 4.6 \\ [a] + \{b\} - c = 1 \\ 2\{a\} + 2b + [c] = 4.5 \end{cases}$$

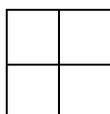
請問 $a + b + c$ 的最大可能值是什麼？

11. 在一個無限大的方格表中，每個單位小方格被塗成了白色或灰色。若方格 X 與 Y 在同一列， Y 與 Z 在同一行，且 X 與 Z 為白色， Y 為灰色，則 (X, Y, Z) 被稱作“ IMC 三角形”。例如，下面的方格表中， (X, Y, Z) 是一個 IMC 三角形。



請問在一個 15×15 的方格表中最多可能有多少個“ IMC 三角形”？

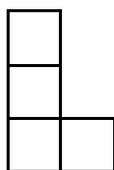
12. 將一個無限大的方格表上的每一個小方格都填上一個數碼。小莎在該方格表上沿著格線放置一片下圖所示的 O 型四方塊，它可以覆蓋四個小方格：



無論這一片 O 型四方塊放置在哪一個位置，在此無限大的方格表上至少需要填入 4 個相異的數碼，才能使得所覆蓋的任意四個小方格上的數碼都不相同。下圖為其中一種填入數碼的方式：

	1	2	1	2	1	2	1	2
	3	4	3	4	3	4	3	4
	1	2	1	2	1	2	1	2
	3	4	3	4	3	4	3	4
	1	2	1	2	1	2	1	2
	3	4	3	4	3	4	3	4
	1	2	1	2	1	2	1	2
	3	4	3	4	3	4	3	4

若小莎在這個方格表上放置一片 L 型四方塊並沿著格線覆蓋四個小方格，請問在此無限大的方格表上必須至少填入多少個相異的數碼才能使得被這片 L 型四方塊覆蓋的四個小方格始終都是不同的數碼？



L 型四方塊



India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26th to 31st July 2024

青少年數學國際城市邀請賽

隊名: _____ 姓名: _____ 編號: _____

第二部份:

計算與證明題，請在題目下空白處寫出計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. 考慮以下有限數列： $\sqrt{1}$ 、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、...、 $\sqrt{2023}$ 、 $\sqrt{2024}$ ，並進行如下操作：
每一步，都從中選擇兩個數，記為 x 與 y ，刪去這兩個數，並用以下一個新數替代入

$$z = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2 y^2}}}$$

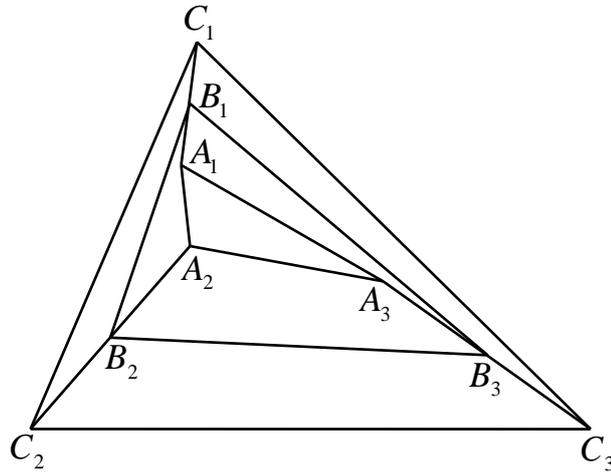
操作 2023 步之後，我們將只剩一個數。請問這個數是什麼？

答: _____

青少年數學國際城市邀請賽

隊名: _____ 姓名: _____ 編號: _____

2. 三個三角形 $A_1A_2A_3$ 、 $B_1B_2B_3$ 、 $C_1C_2C_3$ 滿足 $A_1A_2A_3$ 在 $B_1B_2B_3$ 內部， $B_1B_2B_3$ 在 $C_1C_2C_3$ 內部，其中 B_i 為 A_iC_i 的中點， $1 \leq i \leq 3$ ，如下圖所示。



如果 $A_1A_2A_3$ 與 $C_1C_2C_3$ 的周長分別為 a cm 與 c cm，請問 $B_1B_2B_3$ 的周長的最大可能值是多少 cm？

答：_____ cm

青少年數學國際城市邀請賽

隊名: _____ 姓名: _____ 編號: _____

3. 小安與小柏二人玩一個算數遊戲，他們從一張紙上只有一個數 2024 開始。由 小安 為先手，二人輪流在這張紙上寫下一個正整數，使得寫下的數要比對方剛剛寫的數小，但是至少是對方剛剛寫的數的三分之一。第一步時，小安 可以寫下比 2024 小，但是不小於 $\frac{2024}{3}$ 的一個正整數。最後能寫下 1 的玩家獲勝。請問誰有必勝策略(確定並證明)? 他的必勝策略是什麼?

答: _____ 有必勝策略