



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年数学国际城市邀请赛

### 队际赛试题

答题时间：70 分钟

#### 答题指引：

- 队际赛试题答题时间共 70 分钟，共 10 页，每页一题。  
第 1、3、5、7、9 题的答案仅须填写阿拉伯数值；(中文数字不予计分)  
第 2、4、6、8、10 题必须填写详细计算过程或证明。
- 每道题目 40 分。奇数题号的题目，没有部分分数，答错不倒扣分数。您所填入的答案个数不得多于所要求的答案个数。若题目有不只一个答案，则全部答对才给分。偶数题号的题目，将根据答题情况给予部份分数。
- 题目中所提供之图形只是示意图，不一定精准。

#### 作答须知：

- 请在每一张题目卷的对应位置填写您的队名。
- 请将每一题的答案填写在每一张题目卷所附的空格内或背面空白处。
- 在一开始的 10 分钟内，四名队员允许互相讨论与分配前八题，每位队员至少要解答一题。
- 在接下来的 35 分钟内，四名队员仅允许在所分配到的题目卷上作答，不可以再交换题目或讨论。
- 在最后的 25 分钟内，四名队员可一起合作在最后两题的题目卷上作答。
- 不得使用任何计算器具、电子仪器与量角器。
- 答题结束后，请将您的题目卷、答案卷与所有计算纸装入信封并交由监试人员收回。

Simplified Chinese Version

简体中文版

隊名： \_\_\_\_\_



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年数学国际城市邀请赛

### 队际赛试题

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

队名： \_\_\_\_\_ 解题者： \_\_\_\_\_ 编号： \_\_\_\_\_

1. 令正整数  $C$ 、 $M$ 、 $S$  满足方程

$$C^2 + M^2 + 2^{2024} = 25 \times 2^S。$$

已知  $C \leq M$ ，请问它的解  $(C, M, S)$  是什么？

答： \_\_\_\_\_ ( \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ )



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年数学国际城市邀请赛

### 队际赛试题

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

队名: \_\_\_\_\_ 解题者: \_\_\_\_\_ 编号: \_\_\_\_\_

2. 令  $f(x) = ax^2 + bx + c$  为一个函数，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为整数且  $a > 0$ 。已知  $x_1$  与  $x_2$  为  $f(x) = 0$  的两个根，其中  $0 < x_1 < x_2 < 1$ ，请问  $a$  的最小可能值是什么？

答: \_\_\_\_\_



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年数学国际城市邀请赛

### 队际赛试题

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

队名: \_\_\_\_\_ 解题者: \_\_\_\_\_ 编号: \_\_\_\_\_

3. 将集合  $M = \{1, 2, 3, \dots, 2024\}$  分成  $E$  与  $O$  两个子集, 使得  $E$  包含  $M$  中所有数码和为偶数的数、 $O$  包含  $M$  中所有数码和为奇数的数。若  $e$  为  $E$  中所有元素之和,  $o$  为  $O$  中所有元素之和, 请问  $e - o$  的值是什么?

答: \_\_\_\_\_



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

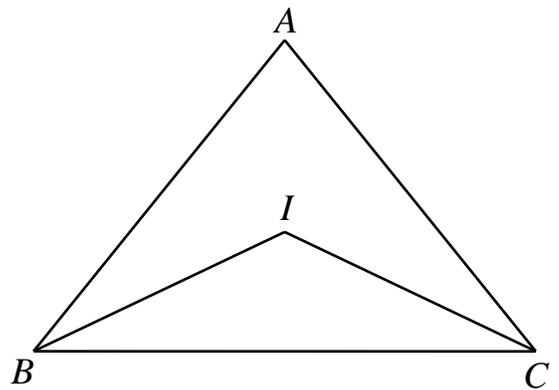
## 青少年数学国际城市邀请赛

### 队际赛试题

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

队名：\_\_\_\_\_ 解题者：\_\_\_\_\_ 编号：\_\_\_\_\_

4. 三角形 $ABC$ 中，点 $I$ 为内角 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的角平分线之交点，如下图所示。若 $BI + AC = CI + AB$ ，请证明三角形 $ABC$ 为等腰三角形。





# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

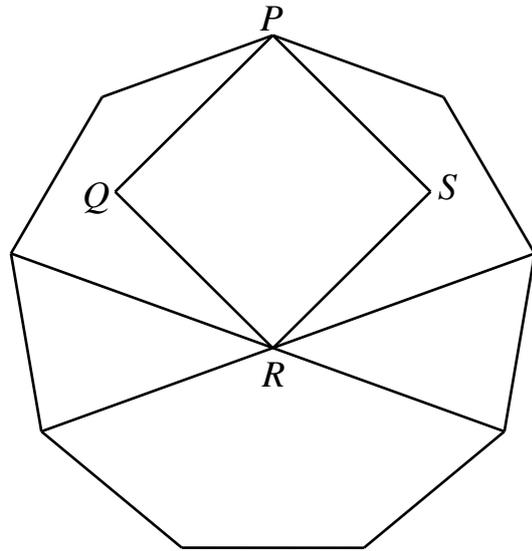
## 青少年数学国际城市邀请赛

### 队际赛试题

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

队名: \_\_\_\_\_ 解题者: \_\_\_\_\_ 编号: \_\_\_\_\_

5. 正方形  $PQRS$  在正九边形的内部且点  $P$  是正九边形的一个顶点，如下图所示。若正九边形的边长为 48 cm，请问正方形  $PQRS$  的面积是多少  $\text{cm}^2$ ?



答: \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年数学国际城市邀请赛

### 队际赛试题

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

队名: \_\_\_\_\_ 解题者: \_\_\_\_\_ 编号: \_\_\_\_\_

6. 令  $\overline{ABCD}$  为一个四位数, 已知  $\overline{ABCD}^{2025}$  的最后两位数为 57, 请问两位数  $\overline{CD}$  的最大可能值是什么?

答: \_\_\_\_\_



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

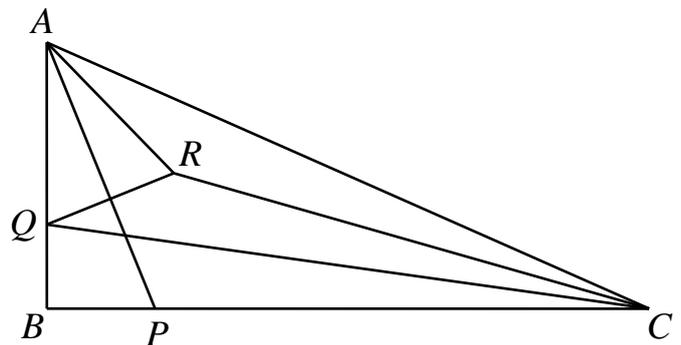
## 青少年数学国际城市邀请赛

### 队际赛试题

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

队名：\_\_\_\_\_ 解题者：\_\_\_\_\_ 编号：\_\_\_\_\_

7. 直角三角形 $ABC$ 的直角顶点为 $B$ ，已知点 $P$ 与点 $Q$ 分别在边 $BC$ 与 $AB$ 上，满足 $\angle PAB = \frac{1}{3} \angle CAB$ 与 $\angle QCB = \frac{1}{3} \angle ACB$ ，如下图所示。若点 $R$ 在三角形 $ABC$ 内部，满足 $\angle RAC = \angle BAP$ 与 $\angle RCA = \angle BCQ$ ，且 $\angle QRC$ 是整数度数，请问 $\angle QRC$ 的度数之最小可能值是什么？



答：\_\_\_\_\_

○



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

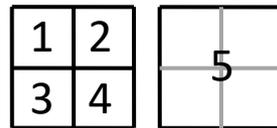
## 青少年数学国际城市邀请赛

### 队际赛试题

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

队名: \_\_\_\_\_ 解题者: \_\_\_\_\_ 编号: \_\_\_\_\_

8. 由单位正方形构成的一个网格中的子正方形为由网格线围成的各种大小的正方形，例如一个 $2 \times 2$ 网格如下图所示包含5个子正方形：



如果由单位正方形构成的一个 $m \times n$ 网格中恰有2024个子正方形，请问 $mn$ 的最小可能值是什么？

答: \_\_\_\_\_



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年数学国际城市邀请赛

### 队际赛试题

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

队名: \_\_\_\_\_ 解题者: \_\_\_\_\_ 编号: \_\_\_\_\_

9. 有 $n$ 头驴站在一个圆形农场的圆周上，牠们进行如下的游戏：这些驴按顺时针方向依次编号为1、2、3、...、 $n$ 。从编号为1的驴开始按顺时针方向依次不断地逐一报出字母“D”、“O”、“N”、“K”、“E”、“Y”、“D”、“O”、“N”、“K”、“E”、“Y”、“D”、“O”、... 报出字母“Y”的这头驴必须离开圆圈，接着下一头驴继续报出字母“D”。游戏继续下去。直到圆圈上只剩下一头驴为止，最后留下的这头驴赢得比赛。

例如，当 $n=4$ 时，游戏过程如下：

1号驴叫出“D”，2号叫出“O”，3号叫出“N”，4号叫出“E”，1号叫出“K”，2号叫出“Y”，2号驴离场。

接下来，3号驴叫出“D”，4号叫出“O”，1号叫出“N”，3号叫出“E”，4号叫出“K”，1号叫出“Y”，1号驴离场。

3号驴叫出“D”，4号叫出“O”，3号叫出“N”，4号叫出“E”，3号叫出“K”，4号叫出“Y”，4号驴离场。

最后是3号驴留下而赢得比赛。

已知当 $n=186$ 时，最后赢得比赛的是10号驴。请问使得最后赢得比赛的是100号驴之最小的 $n$  ( $n > 186$ ) 值是什么？

答: \_\_\_\_\_



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年数学国际城市邀请赛

### 队际赛试题

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

队名：\_\_\_\_\_ 解题者：\_\_\_\_\_ 编号：\_\_\_\_\_

**10.** 库克船长与他的船员们在黄金岛得到了 10 块金砖，现在他们要通过游戏来决定如何分配这些金砖。

船员们准备一些箱子，每个箱子内最多放入一块金砖（所有人都可看见每个箱子的内部）。然后船员们把箱子用铁链连起来，构成一个树状。进行游戏时，船长与一名船员代表轮流每次取走一个箱子，由船长开始先取，并遵照以下规则：当可能时，每个人必须取与已经被取走的某个箱子直接用铁链相连的其中一个箱子；如果不可能时，则他可以取走任何一个箱子。（特别地，最开始时船长可以取任何一个箱子，因为此时没有任何一个箱子被取走。）

例如，假设有三块金砖，船员用如下方式连接箱子：

$$G \text{ --- } 0 \text{ --- } G \text{ --- } 0 \text{ --- } G$$

其中 G 代表有金砖的箱子，0 代表空箱子。于是船长可以取最左面的 G，迫使船员代表取 0，然后船长取 G，船员代表取 0，最后船长取 G。

考察另一个例子，假设船员用如下方式连接箱子：

$$\begin{array}{ccccccc} G & \text{---} & 0 & \text{---} & G & \text{---} & 0 \\ & & & & | & & \\ & & & & G & & \end{array}$$

船长开始取最左边的 G 或者两个 0 之间的 G 时，可以保证得到至少两块金砖。最后，假设船员用如下方式连接箱子：

$$\begin{array}{ccccccc} G & \text{---} & 0 & \text{---} & 0 & \text{---} & G \\ & & | & & & & \\ & & 0 & \text{---} & G & & \end{array}$$

则船长最多只能拿到一块金砖。

现有 10 块金砖，请问船员是否可以把箱子做适当连接，使得库克船长最多只能得到一块金砖？如果答案为否定的话，那么船员应该如何做，才能使船长得到的金砖最少？

（请将您的答案写在另一张白纸上）