



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年數學國際城市邀請賽

### 隊際賽試題

答題時間：70 分鐘

#### 答題指引：

- 隊際賽試題答題時間共 70 分鐘，共 10 頁，每頁一題。  
第 1、3、5、7、9 題的答案僅須填寫阿拉伯數值；(中文數字不予計分)  
第 2、4、6、8、10 題必須填寫詳細計算過程或證明。
- 每道題目 40 分。奇數題號的題目，沒有部分分數，答錯不倒扣分數。您所填入的答案個數不得多於所要求的答案個數。若題目有不只一個答案，則全部答對才給分。偶數題號的題目，將根據答題情況給予部份分數。
- 題目中所提供之圖形只是示意圖，不一定精準。

#### 作答須知：

- 請在每一張題目卷的對應位置填寫您的隊名。
- 請將每一題的答案填寫在每一張題目卷所附的空格內或背面空白處。
- 在一開始的 10 分鐘內，四名隊員允許互相討論與分配前八題，每位隊員至少要解答一題。
- 在接下來的 35 分鐘內，四名隊員僅允許在所分配到的題目卷上作答，不可以再交換題目或討論。
- 在最後的 25 分鐘內，四名隊員可一起合作在最後兩題的題目卷上作答。
- 不得使用任何計算器具、電子儀器與量角器。
- 答題結束後，請將您的題目卷、答案卷與所有計算紙裝入信封並交由監試人員收回。

Traditional Chinese Version

正體中文版

隊名： \_\_\_\_\_



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年數學國際城市邀請賽

### 隊際賽試題

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

隊名： \_\_\_\_\_ 解題者： \_\_\_\_\_ ID： \_\_\_\_\_

1. 令正整數  $C$ 、 $M$ 、 $S$  滿足方程

$$C^2 + M^2 + 2^{2024} = 25 \times 2^S \text{。}$$

已知  $C \leq M$ ，請問它的解  $(C, M, S)$  是什麼？

答： \_\_\_\_\_ ( \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ )



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年數學國際城市邀請賽

### 隊際賽試題

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

隊名： \_\_\_\_\_ 解題者： \_\_\_\_\_ ID： \_\_\_\_\_

2. 令  $f(x) = ax^2 + bx + c$  為一個函數，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為整數且  $a > 0$ 。已知  $x_1$  與  $x_2$  為  $f(x) = 0$  的兩個根，其中  $0 < x_1 < x_2 < 1$ ，請問  $a$  的最小可能值是什麼？

答： \_\_\_\_\_



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年數學國際城市邀請賽

### 隊際賽試題

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

隊名： \_\_\_\_\_ 解題者： \_\_\_\_\_ ID： \_\_\_\_\_

3. 將集合  $M = \{1, 2, 3, \dots, 2024\}$  分成  $E$  與  $O$  兩個子集，使得  $E$  包含  $M$  中所有數碼和為偶數的數、 $O$  包含  $M$  中所有數碼和為奇數的數。若  $e$  為  $E$  中所有元素之和， $o$  為  $O$  中所有元素之和，請問  $e - o$  的值是什麼？

答： \_\_\_\_\_



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

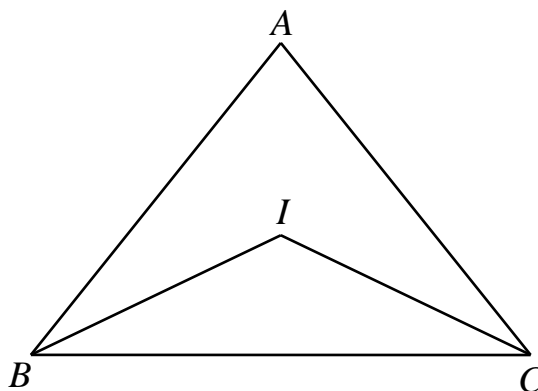
## 青少年數學國際城市邀請賽

### 隊際賽試題

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

隊名：\_\_\_\_\_ 解題者：\_\_\_\_\_ ID：\_\_\_\_\_

4. 三角形 $ABC$ 中，點 $I$ 為內角 $\angle ABC$ 與 $\angle ACB$ 的角平分線之交點，如下圖所示。若 $BI + AC = CI + AB$ ，請證明三角形 $ABC$ 為等腰三角形。





# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

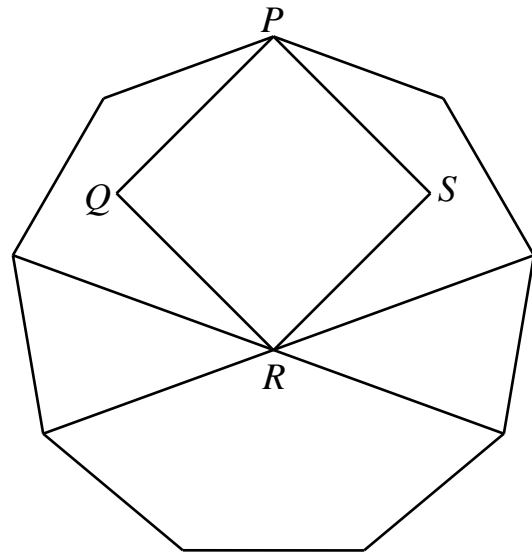
## 青少年數學國際城市邀請賽

### 隊際賽試題

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

隊名： \_\_\_\_\_ 解題者： \_\_\_\_\_ ID： \_\_\_\_\_

5. 正方形  $PQRS$  在正九邊形的內部且點  $P$  是正九邊形的一個頂點，如下圖所示。若正九邊形的邊長為 48 cm，請問正方形  $PQRS$  的面積是多少  $\text{cm}^2$ ？



答： \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年數學國際城市邀請賽

### 隊際賽試題

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

隊名：\_\_\_\_\_ 解題者：\_\_\_\_\_ ID：\_\_\_\_\_

6. 令  $\overline{ABCD}$  為一個四位數，已知  $\overline{ABCD}^{2025}$  的最後兩位數為 57，請問兩位數  $\overline{CD}$  的最大可能值是什麼？

答：\_\_\_\_\_



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

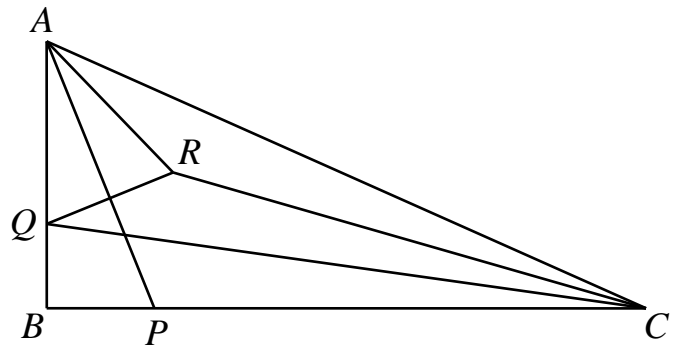
## 青少年數學國際城市邀請賽

### 隊際賽試題

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

隊名：\_\_\_\_\_ 解題者：\_\_\_\_\_ ID：\_\_\_\_\_

7. 直角三角形 $ABC$ 的直角頂點為 $B$ ，已知點 $P$ 與點 $Q$ 分別在邊 $BC$ 與 $AB$ 上，滿足 $\angle PAB = \frac{1}{3}\angle CAB$ 與 $\angle QCB = \frac{1}{3}\angle ACB$ ，如下圖所示。若點 $R$ 在三角形 $ABC$ 內部，滿足 $\angle RAC = \angle BAP$ 與 $\angle RCA = \angle BCQ$ ，且 $\angle QRC$ 是整數度數，請問 $\angle QRC$ 的度數之最小可能值是什麼？



答：

\_\_\_\_\_

o





# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

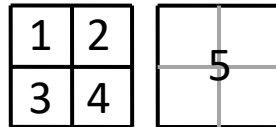
## 青少年數學國際城市邀請賽

### 隊際賽試題

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

隊名： \_\_\_\_\_ 解題者： \_\_\_\_\_ ID： \_\_\_\_\_

8. 由單位正方形構成的一個網格中的子正方形為由網格線圍成的各種大小的正方形，例如一個 $2 \times 2$ 網格如下圖所示包含5個子正方形：



如果由單位正方形構成的一個 $m \times n$ 網格中恰有2024個子正方形，請問 $mn$ 的最小可能值是什麼？

答： \_\_\_\_\_



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年數學國際城市邀請賽

### 隊際賽試題

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

隊名： \_\_\_\_\_ 解題者： \_\_\_\_\_ ID： \_\_\_\_\_

9. 有 $n$ 頭驢站在一個圓形農場的圓周上，牠們進行如下的遊戲：這些驢按順時針方向依次編號為1、2、3、...、 $n$ 。從編號為1的驢開始按順時針方向依次不斷地逐一報出字母“D”、“O”、“N”、“K”、“E”、“Y”、“D”、“O”、“N”、“K”、“E”、“Y”、“D”、“O”、... 報出字母“Y”的這頭驢必須離開圓圈，接著下一頭驢繼續報出字母“D”。遊戲繼續下去，直到圓圈上只剩下一頭驢為止，最後留下的這頭驢贏得比賽。

例如，當 $n=4$ 時，遊戲過程如下：

1號驢叫出“D”，2號叫出“O”，3號叫出“N”，4號叫出“E”，1號叫出“K”，2號叫出“Y”，2號驢離場。

接下來，3號驢叫出“D”，4號叫出“O”，1號叫出“N”，3號叫出“E”，4號叫出“K”，1號叫出“Y”，1號驢離場。

3號驢叫出“D”，4號叫出“O”，3號叫出“N”，4號叫出“E”，3號叫出“K”，4號叫出“Y”，4號驢離場。

最後是3號驢留下而贏得比賽。

已知當 $n=186$ 時，最後贏得比賽的是10號驢。請問使得最後贏得比賽的是100號驢之最小的 $n$  ( $n > 186$ ) 值是什麼？

答： \_\_\_\_\_



# India International Mathematics Competition 2024

Lucknow, 26<sup>th</sup> to 31<sup>st</sup> July 2024

## 青少年數學國際城市邀請賽

### 隊際賽試題

28<sup>th</sup> July, 2024, Lucknow, India

隊名：\_\_\_\_\_ 解題者：\_\_\_\_\_ ID：\_\_\_\_\_

10. 庫克船長與他的船員們在黃金島得到了 10 塊金磚，現在他們要通過遊戲來決定如何分配這些金磚。

船員們準備一些箱子，每個箱子內最多放入一塊金磚（所有人都可看見每個箱子的內部）。然後船員們把箱子用鐵鍊連起來，構成一個樹狀。進行遊戲時，船長與一名船員代表輪流每次取走一個箱子，由船長開始先取，並遵照以下規則：當可能時，每個人必須取與已經被取走的某個箱子直接用鐵鍊相連的其中一個箱子；如果不可能時，則他可以取走任何一個箱子。（特別地，最開始時船長可以取任何一個箱子，因為此時沒有任何一個箱子被取走。）

例如，假設有 3 塊金磚，船員用如下方式連接箱子：

$$G \text{ --- } 0 \text{ --- } G \text{ --- } 0 \text{ --- } G$$

其中 G 代表有金磚的箱子，0 代表空箱子。於是船長可以取最左面的 G，迫使船員代表取 0，然後船長取 G，船員代表取 0，最後船長取 G。

考察另一個例子，假設船員用如下方式連接箱子：

$$\begin{array}{ccccccc} G & \text{---} & 0 & \text{---} & G & \text{---} & 0 \\ & & & & | & & \\ & & & & G & & \end{array}$$

船長開始取最左邊的 G 或者兩個 0 之間的 G 時，可以保證得到至少兩塊金磚。最後，假設船員用如下方式連接箱子：

$$\begin{array}{ccccccc} G & \text{---} & 0 & \text{---} & 0 & \text{---} & G \\ & & & & | & & \\ & & & & 0 & \text{---} & G \end{array}$$

則船長最多只能拿到一塊金磚。

現有 10 塊金磚，請問船員是否可以把箱子做適當連接，使得庫克船長最多只能得到一塊金磚？如果答案為否定的話，那麼船員應該如何做，才能使船長得到的金磚最少？

(請將您的答案寫在另一張白紙上)