國際數學競賽

INTERNATIONAL MATHEMATICS COMPETITION
Changchun China, 27 July ~ 1 August 2015

# 青少年數學國際城市邀請賽

## 個人賽試題

### 答題時間：120 分鐘

**答題指引：**

- 請勿翻開此頁，直到聽到答題指令為止。
- 請在下頁的對應位置填寫隊名、您的姓名及編號。
- 個人賽試題包括兩個部份，總分 120 分。
- 第一部份包括填充題 12 題，只須在空格內填寫**阿拉伯數值**答案，以其他文字書寫一律不計分，不須計算過程，若題目有不只一個答案，則**全部**答對才給分。每題 5 分，答錯不倒扣。
- 第二部份包括計算證明題 3 題，必須填寫詳細計算過程或證明，每題 20 分，根據答題情況給予部份分數。
- 本卷答題時間：120 分鐘。
- 不得使用任何電子計算器具。
- 可使用鉛筆、藍色或黑色圓珠筆作答。
- 答題結束後，監試人員會將所有紙張收回。

## Traditional Chinese Version

## 正體中文版

隊名: _____ 姓名: _____ 編號: _____ 得分: _____

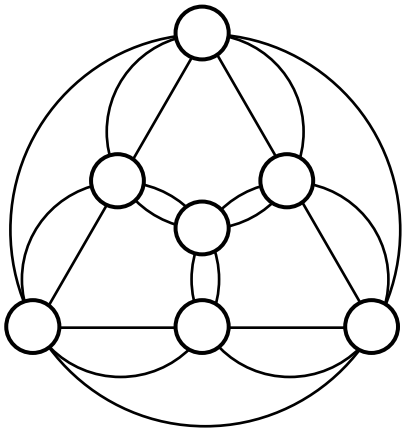
**以下欄位由評審填寫，考生請勿做任何記號**

| 題號 | 第一部份 | | | | | | | | | | | | 第二部份 | | | 總分 | 評審簽名 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | | |
| 分數 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 分數 | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**第一部份：**

**填充題，請將答案填寫在題末所附的空格內，共十二題，每題 5 分。**

1. 在下圖的七個小圓圈中分別填入數 1 至 7，使得最大的圓與每一個中型圓圈的圓周上所填的數之和為 6 的倍數。請問位於中間的小圓圈填入的數是什麼？



答：_____

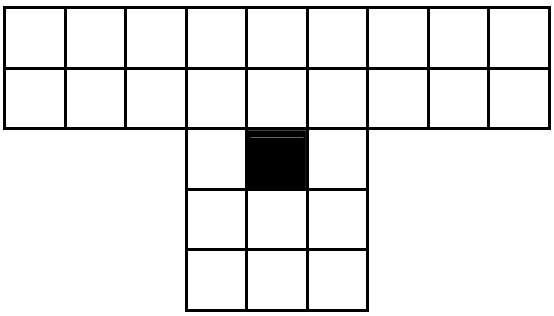
2. 已知正整數 $a$ 的各個數碼互不相同。把 $a$ 的各個數碼重新排列得到整數 $b$。若 $a-b$ 的值的每個數碼都是 1，請問 $a-b$ 的最大可能值為多少？

答：_____

3. 已知在二十一個不同的整數中最大的數為 2015，而 101 是其中的一個數，並且滿足任意十一個數之和大於另外十個數之和。請問這 21 個數的中位數（即它大於其中十個數、而小於剩下的十個數）是什麼？

答：_____

4. 下圖由 26 個白色小方格和一個黑色的小方格組成。請問圖中有多少個不同的矩形？要求任何一個矩形由圖中的小方格組成且不得包含黑色的小方格。



答：_____ 個

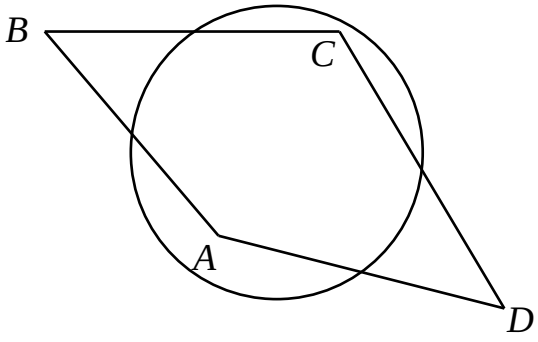
5. 現有一批蔬菜需要從農場運往城裡，其中一部分用貨車運輸，剩下的部分用牛車運輸。已知貨車的速度為 65 km/小時，牛車的速度為 5 km /小時。出發一段時間後，有一架速度為 13 km /小時的馬車轉載貨車上的蔬菜，並讓貨車回去轉載牛車上的蔬菜。馬車與貨車同時到達距離農場 100 km 的目的地。假設卸載和裝載蔬菜的時間忽略不計，請問這批蔬菜從農場運到目的地共費時了多少小時？

答：＿＿＿＿＿＿小時

6. 請問共有多少組正整數對$(x, y)$滿足$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y}+\frac{1}{(x+1)y}=\frac{1}{2015}$？

答：＿＿＿＿＿＿組

7. 設凸四邊形 $ABCD$ 四條邊 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 的中點在同一個圓上。若 $AB=10$ cm、$BC=11$ cm 且 $CD=12$ cm，請問邊 $DA$ 的長度是多少 cm？




答：＿＿＿＿＿＿cm

8. 已知三個兩位數 $\overline{ab}$、$\overline{cd}$、$\overline{ad}$ 滿足 $(\overline{ab})^2+(\overline{cd})^2=(\overline{ad})^2$，請問四位數 $\overline{abcd}$ 的最小可能值為多少？

答：＿＿＿＿＿＿

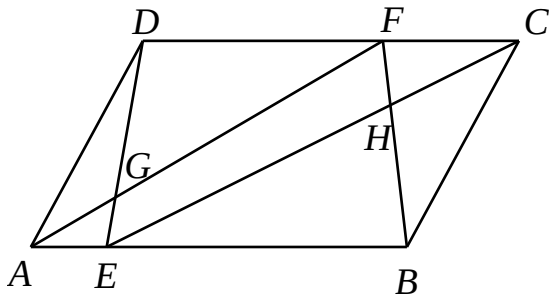
9. 每個1×1塑料板的一組對邊分別塗上紅色與黃色，另一組對邊分別塗上藍色與綠色。現用 64 片這樣的塑料板在牆上拼成一個8×8圖案，這些塑料板可以旋轉或翻轉。若兩片塑料板相鄰，則要求其共同邊的顏色相同。請問總共可以拼成多少片不同的圖案？

答：＿＿＿＿＿＿個

10. 請問所有能表示為$\sqrt{7p^n+9}$（其中 $n$ 為正整數、$p$ 為質數）這種形式的正整數之和是多少？

答：＿＿＿＿＿＿

11. 已知 $ABCD$ 為平行四邊形，點 $E$ 為邊 $AB$ 上一點滿足 $\frac{AE}{EB}=\frac{1}{4}$、點 $F$ 為邊 $DC$ 上一點，$AF$ 與 $DE$ 交於點 $G$，$CE$ 與 $BF$ 交於點 $H$。若 $ABCD$ 的面積為 $1\ \text{cm}^2$，$\triangle BHC$ 的面積為 $\frac{1}{8}\text{cm}^2$，請問 $\triangle ADG$ 的面積為多少 $\text{cm}^2$？




答：＿＿＿＿＿＿ $\text{cm}^2$

12. 設五個不同的正整數滿足：任取兩個數（可以是同一個數取兩次）求和，恰好共得到九種不同的和。對任意這樣的五個數，請問能同時整除這五個數之和的整數之最大值是什麼？

答：＿＿＿＿＿＿

**第二部份：**

**計算與證明題，請在題目下空白處寫出計算或證明過程。共三題，每題 20 分。**

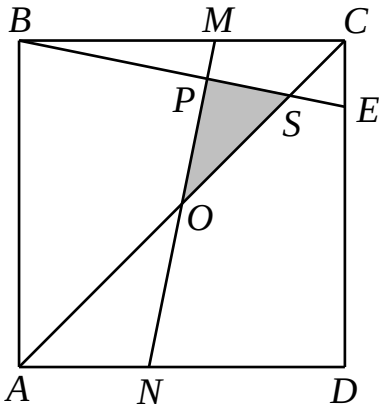
1. 若一個五位數為完全平方數且末兩位數碼相同，請問這樣的五位數共有多少個？

答：＿＿＿＿＿＿ 個

2. 從 1、2、3、4、5、6、7、8、9 九個數碼中隨機選出三個不同的數碼並按遞減順序組成第一個數。用相同的方式構造第二個數，但不可以選數碼 9。請問第一個數大於第二個數的機率為多少？

答：_____

3. 點 $E$、$N$ 分別在正方形 $ABCD$ 的邊 $DC$、$DA$ 上，滿足 $AN : ND : DE = 2 : 3 : 4$。過點 $N$ 作 $BE$ 的垂線與 $BE$ 交於點 $P$、與 $BC$ 交於點 $M$。$AC$ 與 $MN$ 交於點 $O$、與 $BE$ 交於點 $S$。請問△$OPS$ 的面積與 $ABCD$ 的面積的比值是多少？




答：_____