

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 1999

1999 青少年数学国际城市邀请赛队际竞赛试题

1. (a) 试分解 $9^8 + 7^6 + 5^4 + 3^2 + 1$ 成质因子的乘积。
 (b) 试找出 $2^{30} + 3^{20}$ 的任意两个质因子。

2. 请利用所附的空白名片上分别写上整数 1、3、5、...、59，每张卡片只写上一个数。
 (a) 试问数字名片 1、3、5、7、9、11、13、15、17、19 这十张卡片应作如何排列成一迭，使得这些卡片满足下列条件：
 如果自这一迭卡片最上面的第一张取出放在最底下后，第二张卡片的数出现是 1，则 1 的这张卡片取出放在旁边；然后在剩下的卡片中自最上面取出 3 张依序放到最下面，接着最上面的数字卡片是 3。把 3 的这张卡片取出放在旁边；依此方式重复前面的步骤取出 $2k+1$ 张卡片，其中 $2 \leq k \leq 8$ ，并依序放到最下面，则最上面一张数字卡出现 $2k+1$ ，再把 $2k+1$ 的这张卡片取出放在旁边，最后一张是 19。
 请写出你们原来的数字卡片的排列之顺序。
 (b) 试仿造小题(a)的做法，若数字名片为 1、3、5、...、59 时，试问应作如何排列成一迭，使得这些卡片满足下列条件：
 如果自这一迭卡片最上面的第一张取出放在最底下后，第二张卡片的数出现是 1，则 1 的这张卡片取出放在旁边；然后在剩下的卡片中自最上面取出 3 张依序放到最下面，接着最上面的数字卡片是 3。把 3 的这张卡片取出放在旁边；依此方式重复前面的步骤取出 $2k+1$ 张卡片，其中 $2 \leq k \leq 8$ ，并依序放到最下面，则最上面一张数字卡出现 $2k+1$ ，再把 $2k+1$ 的这张卡片取出放在旁边，最后一张是 59。
 请写出你们原来的数字卡片的排列之顺序。

3. (a) 试找一组相异正整数包含 5 这个数，使得它们的倒数的总和是 1。
 (b) 试找一组相异正整数包含 1999 这个数，使得它们的倒数的总和是 1。

4. (a) 试将一个正方形刚好分割成 1999 个内部没有重迭部分的小正方形，这些小正方形大小可以不等；需列出解题过程并说明理由。
 (b) 请将图(1)阴影部分沿网格线剪下并分解成 10 片或更少的片数填满所附之图(2)（中间有 2×2 的洞）。你们的答案必须清楚地表明切开的片数，黏贴时容许部分图片翻转。（需有解题过程并说明理由）

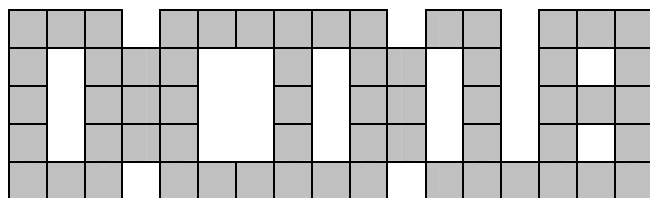


图 (1)

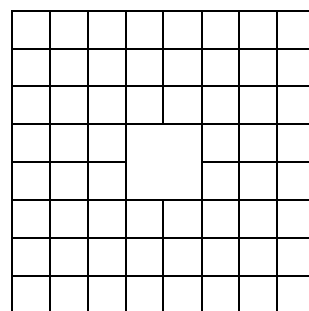


图 (2)

5. 有一个边长为 5 的正方形分割成 25 个小正方形使每一行，每一列恰有五个单位长的正方形。把数字 1、2、3、4、5 填入这些小正方形中使得 1、2、3、4、5 的每一个数字在每一行，每一列和每一对角在线的五个小正方形的数字恰好出现一次，从左上到右下的对角线正下方的四个小正方形上的数字之和称为这个正方形的分数。试问这个正方形的最高分数是多少？说明你的理由及构造这样的正方形。如果你们构造的正方形的分数不是最高，你们仍有部分成绩。

