Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 2000

2000 青少年數學國際城市邀請賽隊際競賽試題

1. E 點為正方形 $ABCD$ 的 $\overline{BC}$ 邊中點、H 點在 $\overline{EA}$ 上使得 $\overline{BE}=\overline{EH}$、而 X 點在 $\overline{AB}$ 上使得 $\overline{AH}=\overline{AX}$。試證：

$$\overline{AB}\times\overline{BX}=\overline{AX}^2 \text{。}$$

2. 將非負整數填入 5×5 的方格表中，其中四個空格已分別填入四個正整數(如圖所示)，試將其餘 21 個空格的每個空格分別填入一個正整數，使得大正方形的每一行及每一列上的數字和都相等。

	82			
				79
		103		
0				

3. 對於 $n\geq 1$，定義 $a_n=1000+n^2$。請求出 a_n 與 a_{n+1} 的最大公因數之最大值。

4. 某校國一有 A、B、C、D、E 五個班級，這五個班級的導師分別為 a(A 班)、b(B 班)、c(C 班)、d(D 班)與 e(E 班)。某次段考後，這五位導師預先猜測各班成績總平均的順序排列如下表：

名次 / 導師	第一名	第二名	第三名	第四名	第五名
a	A	B	C	D	E
b	E	D	A	B	C
c	E	B	C	D	A
d	C	E	D	A	B
e	E	B	C	A	D

成績公佈後，這五班級的成績總平均都不相同，結果發現到只有兩位導師恰好各猜中二個班級的名次，其餘三位導師全部猜錯這五個班級的名次，試問這五個班級成績總平均正確的名次是什麼？

5. 試求滿足$\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)=2$ 的所有的正整數 a、b、c，其中 $a\leq b\leq c$。

6. 給邊長為 4 公分的正方形及三角形紙片各 50 個，試利用這些紙片為凸多面體的面來構造一些盡可能多的凸多面體(不限正多面體)。如果所構造出的凸多面體之頂點數、邊數、正方形面數與三角形面數都相等的凸多面體視為重複。