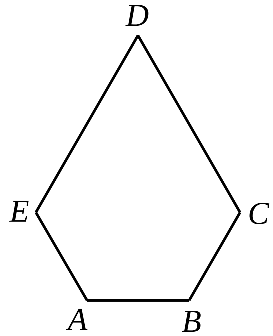
Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 2001

2001 青少年数学国际城市邀请赛个人竞赛试题

第一部份： 填充题，请将答案填写在题末所附的空格内，共十题，每题 6 分。

1. n 为整数，若 $1+2+\ldots+n$ 的和恰等于一个三位数，且此三位数的每个数字皆相同。试找出所有可能的 n。

2. 五边形 $ABCDE$〈如图〉中，$\angle A=\angle B=120^\circ$、$\overline{EA}=\overline{AB}=\overline{BC}=2$、 $\overline{CD}=\overline{DE}=4$。试求五边形 $ABCDE$ 的面积。



3. 若将一个 6 厘米 $\times$6 厘米的正方形盖在一个三角形上，则最多可盖住此三角形 60% 的面积。反之，若将此三角形盖在此正方形上，则最多可盖住此正方形$\frac{2}{3}$的面积。试求这个三角形的面积。

4. 有一组连续的四个正整数，从小到大依次排列，第一个数是 5 的倍数；第二个数是 7 的倍数；第三个数是 9 的倍数；第四个数是 11 的倍数。试求此四个连续正整数。

5. 在 5 时到 6 时之间，某人看表时，由于不慎将时针看成分针，造成他看到的时间比正确的时间大约早了 55 分钟。试问他看到的时间比正确的时间实际上早了几分钟？

6. $\triangle ABC$ 的内切圆分别与三边$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$切于 D、E、F 。若内切圆半径为 4，且$\overline{BD}$、$\overline{CE}$、$\overline{AF}$之长是连续整数。试求$\triangle ABC$ 的三边长。

7. 试求出所有的质数 P，使得下列方程组有整数解 ：

$$\begin{cases} p+1=2x^2 \\ p^2+1=2y^2 \end{cases}$$

8. 解方程式：$\sqrt{3x^2-18x+52}+\sqrt{2x^2-12x+162}=\sqrt{-x^2+6x+280}$。

9. 化简 $\sqrt{12-\sqrt{24}+\sqrt{39}-\sqrt{104}}-\sqrt{12+\sqrt{24}+\sqrt{39}+\sqrt{104}}$。

10. 设 $M=1010101\ldots01$ ，其中数字 1 出现 k 次。试求出最小的 k 值使得 M 能被 1001001001001 整除。

第二部份：计算及证明题，请在题目下面空白处写出计算或证明过程。共三题，每题 20 分。

1. a、b 为两个相异的正实数。若 $A=\frac{a+b}{2}$、$G=\sqrt{ab}$，试证： $G<\frac{(a-b)^2}{8(A-B)}<A$

2. 试确定实数 p 的范围，使得方程式 $3^{2x}-3^{x+1}=p$ 有两个相异正实数解。

3. 已知一个正方形的四个顶点落在一个锐角三角形的边上，其中二条边上各有一个顶点而第三条边上有二个顶点。若要使这个正方形的面积最大，请问有二个顶点落在上面的边之边长应该是最长的，或是最短的，或是以上两者皆不是？请证明你的答案。