

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 2002

2002 青少年数学国际城市邀请赛队际竞赛试题

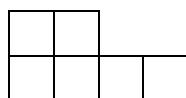
1. m 、 n 、 p 为实数，若 $a = x^{m+n} \cdot y^p$ 、 $b = x^{n+p} \cdot y^m$ 且 $c = x^{p+m} \cdot y^n$ 。试求 $a^{m-n} \cdot b^{n-p} \cdot c^{p-m}$ 之值。

2. 已知 $f(x) = \frac{bx+1}{2x+a}$ ，其中 a 、 b 为常数，且 $ab \neq 2$ 。

(a) 若 $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = k$ ，试求 k 的数值。

(b) 承(a)中 k 值，若 $f(f(x)) = \frac{k}{2}$ ，试求 a 和 b 的数值。

3. 下图是一片“六方块”，它由 6 个单位正方形构成。



试问是否可以用奇数片这个形状的“六方块”拼成一个矩形？请说明你的结论。

4. 若 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}$ ，试求 x 、 y 的整数解(包括正整数及负整数)。

5. 欲将 137 个金币分给兄弟四人，哥哥分得的金币都是弟弟的整数倍，并且兄弟四人所分得的金币个数都不相同。试问这四位兄弟分得的金币各为多少个？

6. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，点 D 为线段 \overline{AC} 上的一点，三角形 ABD 的内切圆半径等于三角形 CBD 在点 B 的对边上的外切圆半径。若从 C 点到 \overline{AB} 所作垂线之长为 h 。试证这二个圆的半径都等于 $\frac{h}{4}$ 。

7. 圆 A 、圆 B 与圆 C 互相两两外切，其半径分别为 a 、 b 、 c ，且圆 C 也同时与圆 A 、圆 B 的公切线相切。

试证： $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$ 。

8. 编号 R 的飞行器的飞行目的是回到基地的中心。这些飞行器都必须依照下列的规则飞行：

1. 任何编号的飞行器都可以朝任何水平或铅直方向飞行。
2. 只允许在前方有其它的飞行器阻挡的情况下，飞行至这个阻挡的飞行器前方的空格内，停下或转弯继续依规则飞行。同一飞行器的连续飞行只算一次飞行。
3. 基地的边界并不是阻挡物，不允许违规飞行。

例子：

			A			
B			*			
R	C			D		

解答： C-D-A-B, R-D-A。

请用最少的飞行次数达成下列 8 种状况的飞行。

状况一：

A					B
		C			R
D					E

答案： _____

状况二：

			A		B
C		*		R	
			D		E

答案： _____

状况三：

A		B			C
			*		
R	D				E

答案： _____

状况四：

A		B			C
			*		
	R	D			E

答案： _____

状况五：

	A			B	C
D			*		
		R			E

答案： _____

状况六：

A				B	C
			*		
		R	D		E

答案： _____

状况七：

	A			B	
			*		C
	D		R		E

答案： _____

状况八：

A					B
C			*		
R	D				E

答案： _____