

# Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 2002

## 2002 青少年數學國際城市邀請賽隊際競賽試題

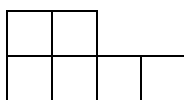
1.  $m$ 、 $n$ 、 $p$  為實數，若  $a = x^{m+n} \cdot y^p$ 、 $b = x^{n+p} \cdot y^m$  且  $c = x^{p+m} \cdot y^n$ 。試求  $a^{m-n} \cdot b^{n-p} \cdot c^{p-m}$  之值。

2. 已知  $f(x) = \frac{bx+1}{2x+a}$ ，其中  $a$ 、 $b$  為常數，且  $ab \neq 2$ 。

(a) 若  $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = k$ ，試求  $k$  的數值。

(b) 承(a)中  $k$  值，若  $f(f(x)) = \frac{k}{2}$ ，試求  $a$  和  $b$  的數值。

3. 下圖是一片“六方塊”，它由 6 個單位正方形構成。



試問是否可以用奇數片這個形狀的“六方塊”拼成一個矩形？請說明你的結論。

4. 若  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}$ ，試求  $x$ 、 $y$  的整數解(包括正整數及負整數)。

5. 欲將 137 個金幣分給兄弟四人，哥哥分得的金幣都是弟弟的整數倍，並且兄弟四人所分得的金幣個數都不相同。試問這四位兄弟分得的金幣各為多少個？

6.  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，點  $D$  為線段  $\overline{AC}$  上的一點，三角形  $ABD$  的內切圓半徑等於三角形  $CBD$  在點  $B$  的對邊上的外切圓半徑。若從  $C$  點到  $\overline{AB}$  所作垂線之長為  $h$ 。試證這二個圓的半徑都等於  $\frac{h}{4}$ 。

7. 圓  $A$ 、圓  $B$  與圓  $C$  互相兩兩外切，其半徑分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，且圓  $C$  也同時與圓  $A$ 、圓  $B$  的公切線相切。

試證： $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$ 。

8. 編號  $R$  的飛行器的飛行目的是回到基地的中心。這些飛行器都必須依照下列的規則飛行：

1. 任何編號的飛行器都可以朝任何水平或鉛直方向飛行。
2. 只允許在前方有其它的飛行器阻擋的情況下，飛行至這個阻擋的飛行器前方的空格內，停下或轉彎繼續依規則飛行。同一飛行器的連續飛行只算一次飛行。
3. 基地的邊界並不是阻擋物，不允許違規飛行。

例子：

			A		
B			*		
R	C			D	

解答： C-D-A-B，R-D-A。

請用最少的飛行次數達成下列 8 種狀況的飛行。

狀況一：

A					B
			C		R
D					E

答案： \_\_\_\_\_

狀況二：

			A		B
C			*		R
			D		E

答案： \_\_\_\_\_

狀況三：

A		B			C
			*		
R	D				E

答案： \_\_\_\_\_

狀況四：

A		B			C
			*		
	R	D			E

答案： \_\_\_\_\_

狀況五：

	A			B	C
D			*		
		R			E

答案： \_\_\_\_\_

狀況六：

A				B	C
			*		
		R	D		E

答案： \_\_\_\_\_

狀況七：

	A			B	
			*		C
	D		R		E

答案： \_\_\_\_\_

狀況八：

A					B
C			*		
R	D				E

答案： \_\_\_\_\_