5^{th} Invitational World Youth Mathematics Inter-City Competition

第五届青少年数学国际城市邀请赛

Individual Contest 个人赛试卷 答题时间：120 分钟 **2004/8/4, Macau**

队名：____________编号：____________姓名：______________得分：________

第一部份：填空题(只须填写答案，每题五分)

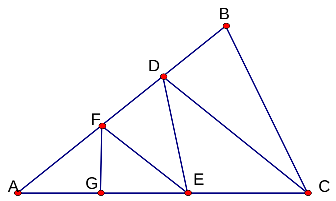
1. 平面上的两个圆 C_1、C_2，其圆心分别为O_1、O_2，此二圆相交于两个不同的点 A、B。直线O_1A交圆C_1于另一点P_1，直线O_2A交圆C_2于另一点P_2。请问点 A、B、O_1、O_2、P_1及P_2中至多能有多少个点共圆？

答：____________________________个点

2. 假设 a、b、c 是实数并且满足$a^2+b^2+c^2=1$ 及 $a^3+b^3+c^3=1$。试求 $a+b+c$ 的所有可能取值。

答：________________________________

3. 如下图ΔABC中，AB=30，AC=32。D 为 AB 上的点；E 为 AC 上的点；F 为 AD 上的点；G 为 AE 上的点；若ΔBCD、ΔCDE、ΔDEF、ΔEFG、ΔAFG 的面积全都相等。试求线段 FD 的长度。



答：________________________________

4. 某地的汽车牌照全都是由七位数字所组成，每面车牌的最左边的数字不可以是0，且任两面车牌上的数都不相同。现只能用 0、1、2、3、5、7、9 等七个不同的钢模来轧制车牌，制造一个车牌时同一个钢模只能使用一次，可以把数字 9 的钢模旋转后当成数字 6 来用，但 6 和 9 不能同时出现。现将符合上述要求的全部车牌依照其数值由小至大排序，因此它们依序是：1023567、1023576 、1023579、....、9753210。请问第 7000 面车牌的号码是什么？

答：________________________________

5. 试问有多少组正整数数对(x, y)为方程$x^2+y^2-16y=2004$的解？

答：______________________________组

6. 现有很多个大小为2×5、1×3的小矩形，利用这些小矩形不重迭地拼出矩形。试求所有正整数数对(m, n)，其中$2\le m\le n$，使得无法用这些小矩形拼出大小为$m\times n$的矩形。

答：________________

7. 试把 1, 2, 3, ⋯, 9 等九个数字不重复地填入3×3的方格表中，使得下列六个图中打星号位置上的四个数字之和全部都相等。

*		*
*		*

*	*	
*	*	

	*	*
	*	*

*	*	
*	*	

	*	*
	*	*

	*	
*		*
	*	

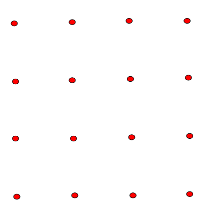
答：

8. 有位富翁打算将 83 粒钻石分给他的五个儿子，要求依照以下的法则分配：
   a. 每粒钻石都不能分割；
   b. 任意两个儿子分得的钻石数目皆互不相同；
   c. 任意两个儿子分得的钻石数目之差(大减小)也互不相同；
   d. 任意三个儿子分得的钻石数目之和大于总数的一半。

请给出满足以上条件的一个分配方法。

答：________________

9. 下图是一个4×4的格点，从中选取n个点，使得其中任意 3 点都无法构成一个等腰三角形。试求n的最大值。



答：________________

10. 已知 x 与 y 皆为大于 1 的正整数。现把此两数之积写在 A 头顶的帽子上，把此两数之和写在 B 头顶的帽子上。他们俩人都看不见自己帽子上的数，但都可以看到对方帽子上的数。他们分别轮流说出以下的对话：

B 说：我不知道我帽上的数。

A 说：我也不知道我帽子上的数。

B 说：我依然不知道我帽上的数。

A 说：我现在知道我帽子上的数了。

A、B 两人都是饱学的逻辑学家，他们不会推理错误并且说的都是真话，请问 A、B 帽子上所写的数分别是多少？

答：A=__________ ；B=__________________

11. 记号 $\{y\}$ 表示 y 的小数部分，例如{3.1416…}=0.1416…。试求方程 $\{(x+1)^3\}=x^3$ 的所有实数解 x。

答：____________________________________

12. 令 x、y、z 为实数，试求 $x^2+y^2+5z^2-xy-3yz-xz+3x-4y+7z$ 的最小值。

答：____________________________________

第二部份：计算证明题 (必须详细写出演算过程或理由，每题 20 分)

1. 一个 m 项的正整数数列 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，如果满足以下两个条件：

(i) 对于任意的正整数 $1\le i\le m-1$， $x_i \le x_{i+1}$；

(ii) 数列中的所有奇数项 x_1、 x_3、...全是奇数，并且数列中的所有偶数项 x_2、 x_4、...全是偶数。

则称此数列为一个 *OE* 数列。例如：最大的项不大于 4 的 *OE* 数列只有 (1)、(3)、 (1, 2)、(1, 4)、(3, 4)、(1, 2, 3)、 (1, 2, 3, 4)等七个。

请问最大的项不大于 20 的 *OE* 数列共有多少个？请说明理由。

2. 三角形 *ABC* 的三边长度分别为 9、12、15。将各边分为 n (≥ 2) 等分，把所有这些等分点到其所对的顶点的距离平方的总和记为 *S*。若 *S* 是正整数，试求满足上述条件的所有正整数 n 的值，并请说明理由。

3. 设 *ABC* 为锐角三角形，其中 *BC*= *a*, *AC*=*b*, *AB*=*c*。*D* 为边 *BC* 上的一点，*E*、*F* 分别为点 *D* 到边 *AB*、*AC* 上的垂足，直线 *BF*、*CE* 交于点 *P*。若 *AP* 垂直 *BC*，试以 *a*, *b*, *c* 表示线段 *BD* 之长度，并对你的答案给出证明。