



5th Invitational World Youth Mathematics Inter-City Competition
第五屆青少年數學國際城市邀請賽

Individual Contest 個人賽試卷 答題時間：120分鐘 2004/8/4, Macau

隊名：_____ 編號：_____ 姓名：_____ 得分：_____

第一部份：填空題(只須填寫答案，每題五分)

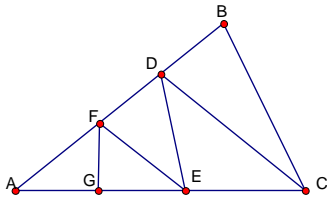
1. 平面上的兩個圓 C_1 、 C_2 ，其圓心分別為 O_1 、 O_2 ，此二圓相交於兩個不同的點 A 、 B 。直線 O_1A 交圓 C_1 於另一點 P_1 ，直線 O_2A 交圓 C_2 於另一點 P_2 。請問點 A 、 B 、 O_1 、 O_2 、 P_1 及 P_2 中至多能有多少個點共圓？

答：_____ 個點

2. 假設 a 、 b 、 c 是實數並且滿足 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 及 $a^3 + b^3 + c^3 = 1$ 。試求 $a + b + c$ 的所有可能取值。

答：_____

3. 如下圖 $\triangle ABC$ 中， $AB=30$ ， $AC=32$ 。 D 為 AB 上的點； E 為 AC 上的點； F 為 AD 上的點； G 為 AE 上的點；若 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDE$ 、 $\triangle DEF$ 、 $\triangle EFG$ 、 $\triangle AFG$ 的面積全都相等。試求線段 FD 的長度。



答：_____

4. 某地的汽車牌照全都是由七位數字所組成，每面車牌的最左邊的數字不可以是 0，且任兩面車牌上的數都不相同。現只能用 0、1、2、3、5、7、9 等七個不同的鋼模來軋製車牌，製造一個車牌時同一個鋼模只能使用一次，可以把數字 9 的鋼模旋轉後當成數字 6 來用，但 6 和 9 不能同時出現。現將符合上述要求的全部車牌依照其數值由小至大排序，因此它們依序是：1023567、1023576、1023579、....、9753210。請問第 7000 面車牌的號碼是什麼？

答：_____

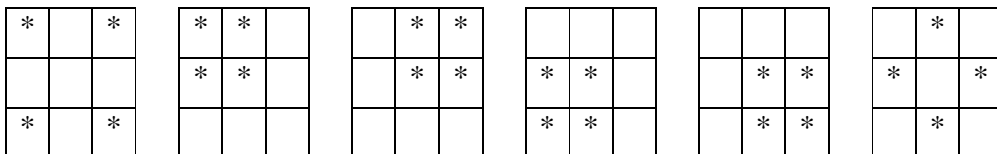
5. 試問有多少組正整數數對 (x, y) 為方程 $x^2 + y^2 - 16y = 2004$ 的解？

答：_____ 組

6. 現有很多個大小為 2×5 、 1×3 的小矩形，利用這些小矩形不重疊地拼出矩形。試求所有正整數數對 (m, n) ，其中 $2 \leq m \leq n$ ，使得無法用這些小矩形拼出大小為 $m \times n$ 的矩形。

答：_____

7. 試把 $1, 2, 3, \dots, 9$ 等九個數字不重複地填入 3×3 的方格表中，使得下列六個圖中打星號位置上的四個數字之和全部都相等。



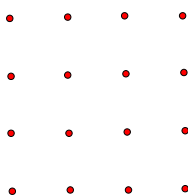
答： 

8. 有位富翁打算將 83 粒鑽石分給他的五個兒子，要求依照以下的法則分配：
- 每粒鑽石都不能分割；
 - 任意兩個兒子分得的鑽石數目皆互不相同；
 - 任意兩個兒子分得的鑽石數目之差(大減小)也互不相同；
 - 任意三個兒子分得的鑽石數目之和大於總數的一半。

請給出滿足以上條件的一個分配方法。

答：_____

9. 下圖是一個 4×4 的格點，從中選取 n 個點，使得其中任意 3 點都無法構成一個等腰三角形。試求 n 的最大值。



答：_____

10. 已知 x 與 y 皆為大於 1 的正整數。現把此兩數之積寫在 A 頭頂的帽子上，把此兩數之和寫在 B 頭頂的帽子上。他們兩人都看不見自己帽子上的數，但都可以看到對方帽子上的數。他們分別輪流說出以下的對話：

B 說：我不知道我帽上的數。

A 說：我也不知道我帽子上的數。

B 說：我依然不知道我帽上的數。

A 說：我現在知道我帽子上的數了。

A 、 B 兩人都是飽學的邏輯學家，他們不會推理錯誤並且說的都是真話，請問 A 、 B 帽子上所寫的數分別是多少？

答： A =_____； B =_____

11. 記號 $\{y\}$ 表示 y 的小數部分，例如 $\{3.1416\dots\}=0.1416\dots$ 。試求方程 $\{(x+1)^3\}=x^3$ 的所有實數解 x 。

答：_____

12. 令 x 、 y 、 z 為實數，試求 $x^2 + y^2 + 5z^2 - xy - 3yz - xz + 3x - 4y + 7z$ 的最小值。

答：_____

第二部份：計算證明題 (必須詳細寫出演算過程或理由，每題 20 分)

1. 一個 m 項的正整數數列 (x_1, x_2, \dots, x_m) ，如果滿足以下兩個條件：

(i) 對於任意的正整數 $1 \leq i \leq m-1$ ， $x_i \leq x_{i+1}$ ；

(ii) 數列中的所有奇數項 x_1 、 x_3 、... 全是奇數，並且數列中的所有偶數項 x_2 、 x_4 、... 全是偶數。

則稱此數列為一個 OE 數列。例如：最大的項不大於 4 的 OE 數列只有 (1)、(3)、(1, 2)、(1, 4)、(3, 4)、(1, 2, 3)、(1, 2, 3, 4) 等七個。

請問最大的項不大於 20 的 OE 數列共有多少個？請說明理由。

2. 三角形 ABC 的三邊長度分別為 9、12、15。將各邊分為 n (≥ 2) 等分，把所有這些等分點到其所對的頂點的距離平方的總和記為 S 。若 S 是正整數，試求滿足上述條件的所有正整數 n 的值，並請說明理由。

3. 設 ABC 為銳角三角形，其中 $BC=a$ ， $AC=b$ ， $AB=c$ 。 D 為邊 BC 上的一點， E 、 F 分別為點 D 到邊 AB 、 AC 上的垂足，直線 BF 、 CE 交於點 P 。若 AP 垂直 BC ，試以 a 、 b 、 c 表示線段 BD 之長度，並對你的答案給出證明。