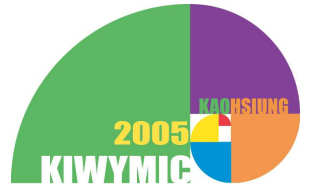


2005 Kaohsiung Invitational World Youth Mathematics  
Intercity Competition

2005 青少年数学国际城市邀请赛



个人赛试题 答题时间：120 分钟 2005/8/3 高雄市

第一部份： 填空题， 请将答案填写在空格内。不须列出演算过程， 共 12 题， 每题五分。

1. 已知  $n$  为四位数的正整数， 如果  $n$  和它的四个数字之和正好等于 2005， 则  $n$  值为何？

答案： \_\_\_\_\_

2. 在  $\triangle ABC$  中，  $\overline{AB} = 10$ ，  $\overline{AC} = 18$ ，  $M$  是  $\overline{BC}$  中点， 过  $M$  作一直线平行于  $\angle CAB$  的角平分线且交  $\overline{AC}$  于  $D$ ， 则  $\overline{AD}$  之长为何？

答案： \_\_\_\_\_

3. 已知  $x$ 、  $y$ 、  $z$  是正数且满足 
$$\begin{cases} x + y + xy = 8, \\ y + z + yz = 15, \\ z + x + zx = 35, \end{cases}$$
 则  $x + y + z + xy$  之值为何？

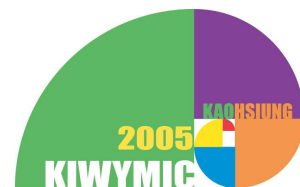
答案： \_\_\_\_\_

4. 有 11 个男孩和  $n$  个女孩去采蘑菇。 他们采得蘑菇总数是  $n^2 + 9n - 2$ ， 且每个孩子采得蘑菇数量相同， 则正整数  $n$  的值为何？

答案： \_\_\_\_\_

# 2005 Kaohsiung Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

## 2005 青少年数学国际城市邀请赛



5. 使得  $x$  和  $x + 99$  都是完全平方数的所有正整数  $x$  的可能值的总和是多少?

答案: \_\_\_\_\_

6. 已知一个直角三角形的三条边均为正整数, 其中一条直角边不超过 20, 其外接圆半径与内切圆半径之比为 5: 2, 则此三角形周长的最大值为何?

答案: \_\_\_\_\_

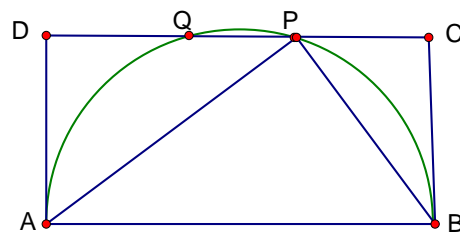
7. 设方程式  $(2004x)^2 - 2003 \cdot 2005x - 1 = 0$  较大的根为  $\alpha$ ,  $x^2 + 2003x - 2004 = 0$  较小的根为  $\beta$ , 则  $\alpha - \beta$  之值为何?

答案: \_\_\_\_\_

8. 设  $a$  为正实数。已知  $a^2 + \frac{1}{a^2} = 5$ , 则  $a^3 + \frac{1}{a^3}$  之值为何?

答案: \_\_\_\_\_

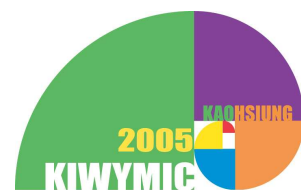
9. 右图中, 四边形  $ABCD$  为矩形。以  $\overline{AB}$  为直径的圆与矩形交于  $P, Q$  两点。设  $\overline{AP} = 4$ ,  $\overline{AB} = 5$ , 则矩形  $ABCD$  的面积为何?



答案: \_\_\_\_\_

# 2005 Kaohsiung Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

## 2005 青少年数学国际城市邀请赛



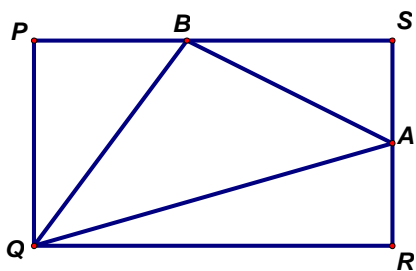
10. 设  $a = 9 \left[ n \left( \frac{10}{9} \right)^n - 1 - \left( \frac{10}{9} \right) - \left( \frac{10}{9} \right)^2 - \dots - \left( \frac{10}{9} \right)^{n-1} \right]$ , 其中  $n$  为正整数。若  $a$  为整数, 则  $a$  的最大值为何?

答案: \_\_\_\_\_

11. 有一个二位数, 它的十位数大于个位数, 且个位数字不为零。它的十位数与个位数的乘积可被它的十位数与个位数的和所整除, 则这个二位数是什么?

答案: \_\_\_\_\_

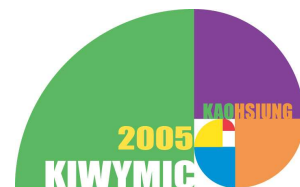
12. 如图,  $PQRS$  的面积为 10 的任意矩形, 点  $A, B$  分别是线段  $RS, PS$  上的一点。若三角形  $ABQ$  的面积为 4, 则对于所有这样的矩形,  $\overline{PB} + \overline{AR}$  所能取到的最小值为何?



答案: \_\_\_\_\_

# 2005 Kaohsiung Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

## 2005 青少年数学国际城市邀请赛



**第二部份：计算及证明题，必须写下计算或证明过程。共三题，每题 20 分。**

1. 设  $a, b, c$  为实数，满足  $a+bc=b+ca=c+ab=501$ 。若  $M$  为  $a+b+c$  的最大值， $m$  为  $a+b+c$  的最小值，则  $M+2m$  之值为何？
2. 已知某个四边形的一个内点到四个顶点的距离分别是 1, 2, 3 及 4，这样的四边形的最大面积为何？
3. 有一张很长的但只有两行的方格表，开始时，将正整数  $1, 2, 3, \dots, 2005$  写在第一列的首 2005 个方格内，接着进行以下操作：首先把第一列上最前面的两个数的和当作一个新数添加在第一列最后一个数后面的方格内，然后把这两个被相加的数移到它们正下方第二列相对应的方格内。依此方式继续对第一列上的数进行操作，直到第一列上的数剩下一个数，并也将它移到第二列相对应的方格内为止。请问最后在第二列上所有数的总和是多少？  
(例如，若开始时第一列所写的数为: 1, 2, 3, 4 及 5，操作结束后，则在第二列上所写的数为: 1, 2, 3, 4, 5, 3, 7, 8 及 15，其总和为 48)