

2005 Kaohsiung Invitational World Youth Mathematics  
Intercity Competition

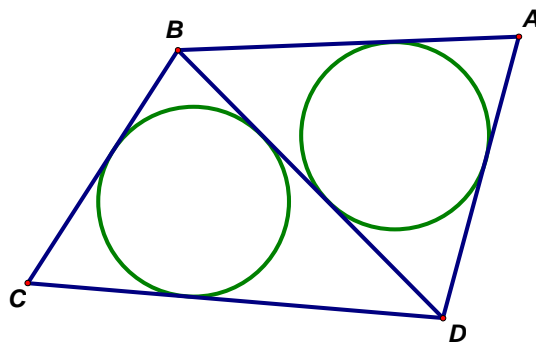
2005 青少年数学国际城市邀请赛

队际赛试题

2005/8/3 高雄市

队名：\_\_\_\_\_ 得分：\_\_\_\_\_

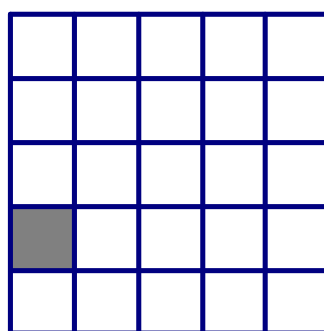
1. 已知  $a, b, c$  为正整数且满足： $a + b + c = 20$  与  $ab + bc - ca - b^2 - 20 = 0$ 。  
试求  $abc$  的所有可能值。
2. 已知  $a_1, a_2, \dots, a_{49}$  为 49 个正整数，这 49 个正整数的总和是 624。试证这 49 个正整数中至少有三个数是相等的。
3. 把既不是平方数，也不是立方数的所有自然数依照由小到大的顺序排列，得到前六项为：2, 3, 5, 6, 7, 10。请问这些自然数的排列中其第 2005 个数是什么？
4. 如图所示， $ABCD$  是一个凸四边形。如果  $\triangle ABD$  和  $\triangle BCD$  的内切圆与线段  $BD$  相切于同一点，试证明：四边形  $ABCD$  有内切圆。




5. 试找出一个三角形使得我们可以将该三角形分割成 20 个全等的小三角形。  
并将分割方式画出来。

6. A 与 B 二人对赌，由 B 作庄，A 每次可下注 0 元或多达至他所现拥有的赌金。若某局 A 赢了，则 B 赔付 A 同额的投注金；若 A 输了，则 B 没收 A 的投注金。开始时 A 有赌资 3 元，二人共赌五局，B 向 A 保证只让 A 输一局，但每局要等 A 下注完后他才决定要不要赢这一局。请问 A 有何策略可以保证在五局结束后能拥有最多的钱？共有多少元？

7. 一只青蛙位于如下图所示  $5 \times 5$  方格表涂上阴影的方格内，它可以水平或铅直跳到的相邻的方格内，但不得斜着跳。试证这只青蛙无法恰好跳经过每个方格一次。



8. 试求正整数  $n$ ，使得  $n^4 - 4n^3 + 15n^2 - 30n + 27$  之值为正的质数。

9. 在  $7 \times 7$  的正方形方格中，任意空去一个  $1 \times 1$  的小方格后得到一个 48 个小方格图案。试证此图案可以沿网格线完整地剪成 16 个  形图案。

10. 已知  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  都是正整数， $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1$  且满足

$$\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{a_0}\right).$$

请找出  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ . 所有可能的解。