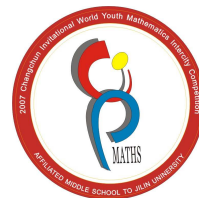


2007 Changchun Invitational World Youth
Mathematics Intercity Competition
2007 青少年数学国际城市邀请赛



个人赛试题 答题时间：120 分钟 2007/7/23 长春市

队名：_____ 姓名：_____ 得分：_____

第一部份：填空题，请将答案填写在空格内。不须列出演算过程，共十二题，
每题 5 分。

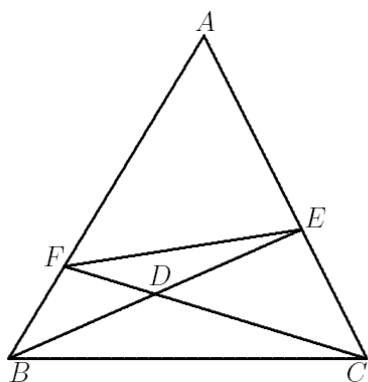
1. 用 A_n 表示 $1, 2, \dots, 101$ 中，能被 n 整除的所有数的算术平均数。问：
 A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 中最大的是那一个？

答案：_____

2. 在一个暴雨的黑夜，孤岛上的四个人必须走过一座窄桥到陆地上去避难。过窄桥必须用灯照明，但是他们只有一盏灯，且桥上每次最多只能通过两个人。若岛上还有人，则过桥之人中必须有人把灯送回去。如果四个人单独过桥，那么所需的时间分别为 2 分钟、4 分钟、8 分钟和 16 分钟；如果两人一起过桥，那么所需时间依照较慢的人过桥的时间计算。问：这四个人过桥最少需要多少时间？

答案：_____

3. 设 E, F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AC, AB 上的点，线段 BE, CF 交于点 D 。已知 $\triangle BDF$ ， $\triangle BCD$ ， $\triangle CDE$ 的面积分别为 3，7，7。问：四边形 $AEDF$ 的面积是多少？



答案：_____

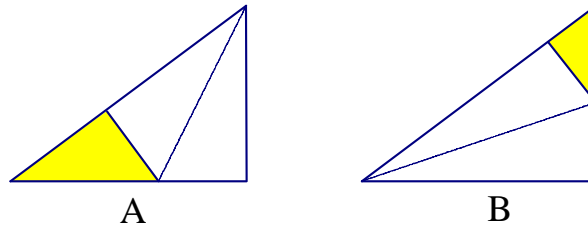
4. 某个团体有 48 名会员，但是只有一半的人有制服。在某次检阅仪式时，他们排成一个 6×8 的长方阵，恰好可把没有制服的会员隐藏在长方阵的内部。后来又来了一批会员，但总数还是有一半的人没有制服，在接下来的检阅仪式，他们排成了一个不同的长方阵，又恰好可把无制服的会员隐藏在长方阵的内部。问：新来的会员有多少人？

答案：_____

5. 已知连续 2008 个正整数的和是一个完全平方数，问：其中最大的数的最小值是多少？

答案：_____

6. 如图，A、B 两个大小形状相同的三角形纸片，其三边的长之比为 3：4：5，按图示方法将它对折，使折痕(图中虚线)过其中的一个顶点，且使该顶点所在两边重合，记折迭后不重合部分面积分别为 S_A 、 S_B ，已知 $S_A + S_B = 39$ ，求三角形纸片 A 的面积。



答案：_____

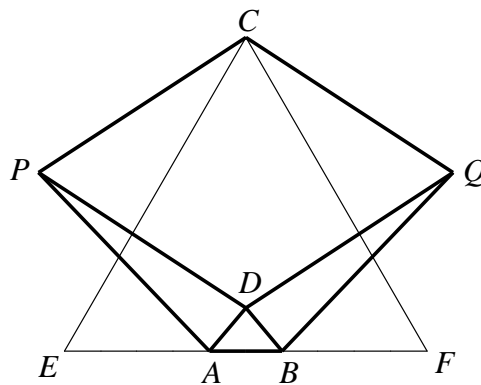
7. 求最大的正整数 n ，使得 $3^{1024} - 1$ 能被 2^n 整除。

答案：_____

8. 用长度分别为 1, 4, 7, 8 的线段围成一个四边形，问：这个四边形的最大面积是多少？

答案：_____

9. 在下图中， $CE=CF=EF$ ， $EA=BF=2AB$ ，且 $PA=QB=PC=QC=PD=QD=1$ ，求线段 BD 之长度。



答案：_____

10. 把 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 和 9 不重复地填入题中方框内，使下式成立。问：在相加的三个分数中，最大的一个是多少？

$$\frac{1}{\square \times \square} + \frac{\square}{\square \times \square} + \frac{\square}{\square \times \square} = 1$$

答案：_____

11. 求满足 $25\{x\} + [x] = 125$ 的所有实数 x 的和。(其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $\{x\} = x - [x]$ 表示 x 的小数部分)

答案: _____

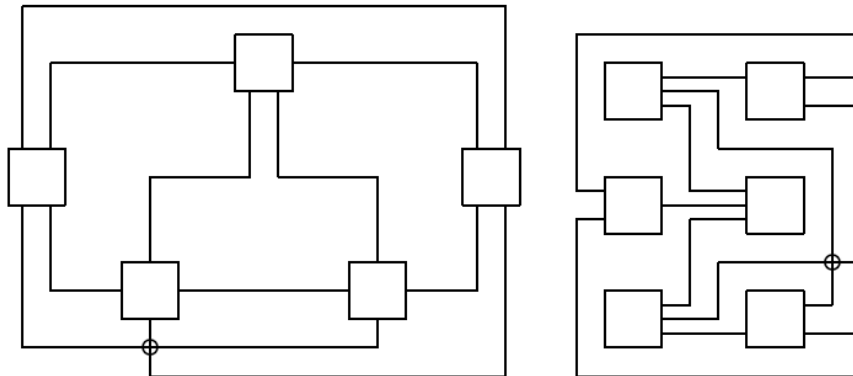
12. 设 n 为正整数, 如果存在一个完全平方数, 使得在十进制表示下此完全平方数的各数码之和为 n , 那么称 n 为好数(例如 13 是一个好数, 因为 $7^2=49$ 的数码和等于 13)。在 1, 2, ..., 2007 中有多少个好数?

答案: _____

第二部份：计算及证明题，必须写下计算或证明过程。共三题，每题 20 分。

1. 在 4×4 的表格中, 可作十八条直线, 即四横、四纵的八条直线, 从左上到右下和从由右上到左下各五条对角线, 这些对角线可能通过 2、3 或 4 个小方格。在表格中要放十个筹码, 每个小方格最多放一个。若这十八条直线中某条直线上有偶数个筹码, 则得一分。问: 最多可以得多少分?

2. 已知五个城市两两相连所得的 10 条道路中，至少有一个交叉路口，如下左图。又已知三个村庄和三个城市相连所得的 9 条道路中，至少有一个交叉路口，如下右图。利用上述结论，问：用 15 条道路把六个城市两两相连，至少会产生多少个交叉路口？



3. 若一个质数的各位数码经任意排列后仍然是质数，则称它是一个“绝对质数”。例如：2, 3, 5, 7, 11, 13(31), 17(71), 37(73), 79(97), 113(131, 311), 199(919, 991), 337(373, 733),... 都是绝对质数。求证：绝对质数的各位数码不能同时出现数码 1, 3, 7 与 9。