



International Mathematics Competition 2008 (IMC 2008)

World Youth Mathematics Intercity Competition

个人赛试题

答题指引：

- 请填写您的姓名、编号及队名。
- 试题包括填充题 12 题与计算证明题 3 题，填充题只须在空格内填写答案，不须计算过程，若题目有不只一个答案，则全部答对才给分，每题 5 分；计算证明题必须详细填写计算过程或证明，每题 20 分，根据答题情况给与部份分数。
- 答题时间：120 分钟。
- 不得使用任何计算器具。
- 可使用铅笔、蓝色或黑色原子笔作答。
- 所有纸张在考试结束时要全部收回。

Simplify Chinese Version



International Mathematics Competition 2008 (IMC 2008)

青少年数学国际城市邀请赛

个人赛试题

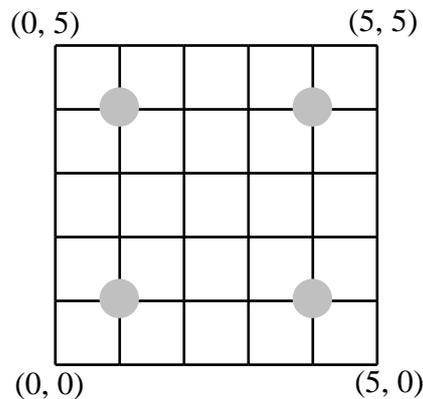
答题时间：120 分钟

2008/10/28 泰国清迈

队名：_____ 姓名：_____ 编号：_____ 得分：_____

第一部份：填空题，请将答案填写在空格内，不须列出演算过程，共十二题，
每题 5 分。

1. 如图是 5×5 的网格。一只蚂蚁在网格左下角 $(0, 0)$ 位置，每次能向上走一格或者向右走一格，要到达右上角 $(5, 5)$ 位置，且不能经过点 $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$ 和 $(4, 4)$ ，请问共有多少种不同的走法？



答案：_____

2. 若 $a-2$ 是正整数且是 $3a^2-2a+10$ 的约数，请问 a 的所有可能值之总和是多少？

答案：_____

3. 已知实数 a 、 b 、 c 满足 $a+b+c=11$ 与 $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{13}{17}$ ，请问

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ 的值是多少？

答案：_____

4. 已知 x 为实数, 请问 $\sqrt{2008-x} + \sqrt{x-2000}$ 的最大值是多少?

答案: _____

5. 一个十位数, 其数码只能是 2 或 3, 且没有两个 3 是相邻的。请问这样的十位数共有多少个?

答案: _____

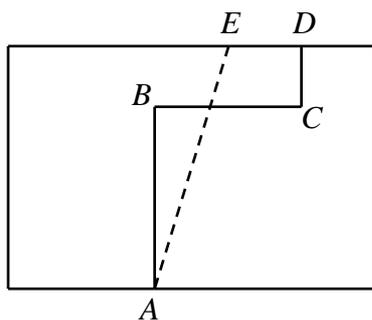
6. 圆周上有和为 94 的 n 个 ($n > 3$) 整数, 每个数都等于它后面 (按顺时针方向) 的两个数的差的绝对值。请问 n 的可能值是什么?

答案: _____

7. 已知 M 是一个四位的完全平方数。若将 M 的千位数减少 3 而个位数增加 3 可以得到另一个四位的完全平方数。请问 M 的值是多少?

答案: _____

8. 如图, 折线 $A-B-C-D$ 的每一条线段都平行于矩形的边, 它把矩形分成面积相等的两部分。点 E 在矩形的边上, 使得线段 AE 也平分矩形的面积, 已知线段 $AB=30$, $BC=24$, $CD=10$, 则 DE 之长度是多少?

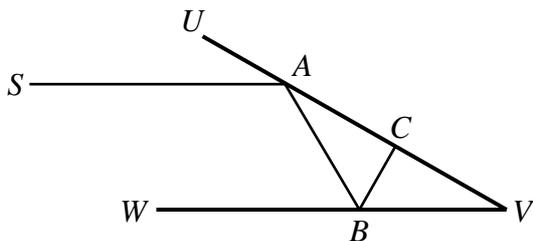


答案: _____

9. 已知函数 $f(x) = ax^2 - c$, 其中 a, c 为实数。若 $-4 \leq f(1) \leq -1$ 且 $-1 \leq f(2) \leq 2$, 则 $f(8)$ 的最大值是多少?

答案: _____

10. 两块平面镜相交成 30° 放置, 交点为 V 。一束水平的光从光源 S 发出, 平行于其中一面镜子 VW , 在另一面镜子 UV 上的 A 点处反射, 又在镜子 VW 上的 B 点处反射, 然后在镜子 UV 上的 C 点处反射, 经过若干次反射后, 光束又返回到 S 。若 $SA=AV=1$, 则光束经过的总路程之长度是多少?

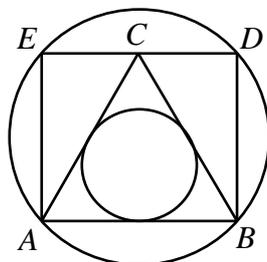


答案: _____

11. 请问使得 $n^2 - n + 11$ 有四个质因子(不必互异)的正整数 n 的最小值是多少?

答案: _____

12. 如图所示, $\triangle ABC$ 是正三角形, 点 C 在矩形 $ABDE$ 的 DE 边上。已知 $\triangle ABC$ 的内切圆半径是 1, 请问矩形 $ABDE$ 的外接圆直径是多少?



答案: _____

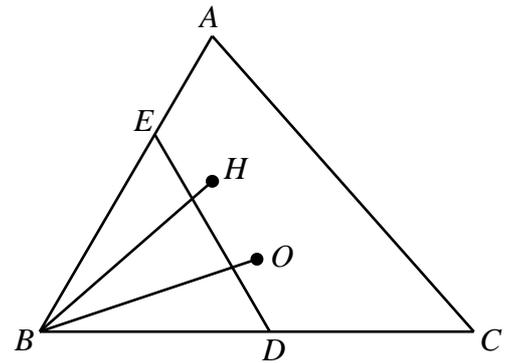
第二部份: 计算及证明题, 必须写下计算或证明过程。共三题, 每题 20 分。

1. 请问算式 $\left[\sqrt{2008 + \sqrt{2008 + \sqrt{2008 + \dots + \sqrt{2008}}}} \right]$ 之值 (这里的 2008 共出现了 2008 次) 是多少? ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。)

答案: _____

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=60^\circ$ ，点 O 、 H 分别是 $\triangle ABC$ 的外心、垂心。点 D 在边 BC 上，使得 $BD=BH$ ；点 E 在边 AB 上，使得 $BE=BO$ 。已知 $BO=1$ ，请问 $\triangle BDE$ 的面积是多少？

（注：三角形的外心是三角形外接圆的圆心；垂心是三高的交点。）



答案：_____

3. 已知 t 为正整数，若 2^t 可以表示成 $a^b \pm 1$ (其中 a 、 b 是大于 1 的整数)，请找出满足上述条件所有可能的 t 值。

答案：_____