

2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



青少年數學國際城市邀請賽

個人賽試題

答題指引:

- 請勿翻開此頁，直到聽到答題指令為止。
- 請在下一頁的對應位置填寫隊名、您的姓名及編號。
- 試題包括填充題 12 題，每題 5 分；計算證明題 3 題，每題 20 分。本卷總分 120 分。
- 填充題只須在空格內填寫**阿拉伯數字**答案，以其他文字書寫一律不計分，不須計算過程，若題目有不只一個答案，則**全部**答對才給分。
- 計算證明題必須填寫詳細計算過程或證明，根據答題情況給分。
- 本卷答題時間：120 分鐘。
- 不得使用任何電子計算器具。
- 不得使用紅筆作答。
- 答題結束後，將回收本卷所有試題和草稿紙。

Traditional Chinese Version

繁體中文版

2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



個人賽試題

答題時間：120 分鐘

2009/07/08 南非 德班

隊名：_____ 姓名：_____ 編號：_____ 得分：_____

第一部份：填充題，請將答案填寫在空格內，共十二題，每題 5 分。

1. 已知 a, b, c 為三個遞增的連續奇數，試求 $a^2 - 2b^2 + c^2$ 的值。

答：_____

2. 將一個正整數 n 放入一個機器內將會產生出一個正整數 $\frac{n(n+1)}{2}$ 。若我們將 5 放入機器內，將所產生出的數再放入機器內，請問機器最後產生出的數是什麼？

答：_____

3. A, B, C 三人採西瓜。

A 與 B 所採西瓜的個數之和比 C 少 6 個；

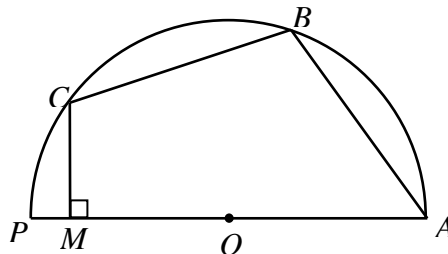
B 與 C 所採西瓜的個數之和比 A 多 16 個；

C 與 A 所採西瓜的個數之和比 B 多 8 個。

請問他們每人所採西瓜的個數之乘積是多少？

答：_____

4. 如圖所示，一個半圓的圓心為 O 。一束光由點 M 沿垂直 PA 的方向射向半圓，光線在圓周上的點 C 處反射，反射角 $\angle OCB$ 等於入射角 $\angle MCO$ ；接著這束光再交圓周於點 B ，依同樣方式反射，最後光射入點 A 。請問 $\angle COM$ 為多少度？



答：_____

5. 年齡分別為 1~19 歲的十九個小孩圍成一個圓圈，將所有相鄰兩個小孩的年齡的差值記錄下來。請問這十九個差的總和的最大值是多少？

答：_____

6. 化簡求值 $\frac{(2^4 + 2^2 + 1)(4^4 + 4^2 + 1)(6^4 + 6^2 + 1)(8^4 + 8^2 + 1)(10^4 + 10^2 + 1)}{(3^4 + 3^2 + 1)(5^4 + 5^2 + 1)(7^4 + 7^2 + 1)(9^4 + 9^2 + 1)(11^4 + 11^2 + 1)}$ 。

答：_____

7. 已知 $A、B、C、D$ 是平面上不共圓的四點。 $\triangle ABD、\triangle ADC、\triangle BCD、\triangle ABC$ 的外心分別為點 $E、F、G、H$ ，線段 EG 與 FH 交於點 I 。若 $AI=4$ ， $BI=3$ ，則 CI 的長度是多少？

答：_____

8. 某次考試，及格分數為 65 分，全班的總平均為 66 分，而所有成績及格的學生的平均為 71 分，所有成績不及格的學生的平均為 56 分。為了減少不及格的學生人數，老師給每位學生的成績加上 5 分。加分之後，所有成績及格的學生的平均變為 75 分，所有成績不及格的學生的平均變為 59 分。已知該班學生人數介於 15 至 30 人之間，請問該班有多少位學生？

答：_____

9. 有多少個不同的直角三角形，以 2009^{12} 為一條直角邊，且三條邊都是整數？(全等三角形視為同一個三角形。)

答：_____

10. 請找出滿足以下條件之最小的六位數：它的數碼和可被 26 整除，且將這個六位數加 1，所得的數的數碼和也可被 26 整除。

答：_____

11. 在一圓周上有 1 個紅點和 2009 個藍點。小丹 計算所有頂點都是藍點的凸多邊形的個數，小克 計算有一個頂點是紅點的凸多邊形的個數。請問他們兩人所得的數之差是多少？

答：_____

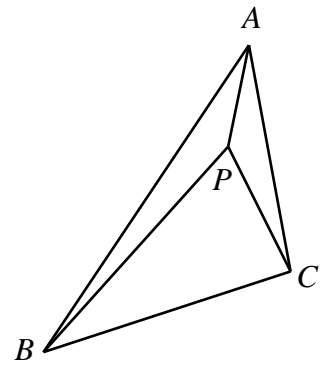
12. 小馬 在體育場賣飲料，礦泉水每瓶 4 元，汽水每瓶 7 元。開始時他共有 350 瓶飲料，雖然沒有全部賣完，但是他的銷售收入恰好是 2009 元。請問小馬 至少賣出了多少瓶汽水？

答：_____

第二部份：計算及證明題，必須寫出計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. 在某次國際象棋比賽中共有 10 位選手參賽，每位選手必須與其他選手恰好對弈一局。經過數局比賽後，發現任意三位選手之間都至少有兩位選手尚未對弈。請問截至此時為止，此棋賽最多已賽過多少局？

2. 點 P 為三角形 ABC 內部一點，使得 $\angle PBC=30^\circ$ ， $\angle PBA=8^\circ$ ，且 $\angle PAB=\angle PAC=22^\circ$ 。請問 $\angle APC$ 為多少度？



3. 請求出最小的正整數滿足以下條件：該數可以被表示為四個正整數的平方和，且可以整除某個形如 $2^n + 15$ 的整數，其中 n 為正整數。