

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 青少年数学国际城市邀请赛

### 队际赛试题

#### 答题指引：

- 请勿翻开此页，直到听到答题指令为止。
- 请在下一页的对应位置填写队名。
- 本卷试题依照由易至难的顺序安排，共有 10 页，每页一题，每题 40 分。第 1、2、6、7、8、9、10 题必须详细填写计算过程或证明，根据答题情况给分；第 3、4、5 题只需填写答案。
- 四名队员先用 10 分钟讨论前 8 题，确定每题答题的队员，每位学生至少要解答一题。然后用 35 分钟，各自作答，不可再交换题目或讨论。最后的 15 分钟，四名队员可一起讨论最后两题并合作解题。
- 不得使用任何电子计算器具。
- 请勿使用红色笔迹作答。
- 所有纸张在考试结束时要全部收回。

Simplify Chinese Version

简体中文版

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 队际赛试题

2009/07/08 南非 德班

队名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

1. 有一叠编号为 1~15 的牌, 开始时按某种顺序叠好, 进行如下两个操作: 将最上面的第一张牌放到桌面上, 再把第二张牌放到整叠牌的最下面. 不断重复这两个操作, 直到所有 15 张牌都依次叠放在桌面上为止. 如果桌上的牌的编号从上到下恰好是 1~15 顺次排列, 请问原来的那叠牌, 从最底下第一张算起的第四张牌是什么?

ANSWER: \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 队际赛试题

2009/07/08 南非 德班

队名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

2. 试求最小的正整数, 使得它的因数中有末位数是 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 和 9 的数至少各一个.

ANSWER: \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 队际赛试题

2009/07/08 南非 德班

队名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

3. 在下图方格中填入数字 1~6, 使得每行、每列及两条主对角线上的方格中, 1、2、3、4、5、6 都恰好各出现一次.

2			1		
					4
	2				
				6	
		5			1
3					

2			1		
					4
	2				
				6	
		5			1
3					

ANSWER: \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

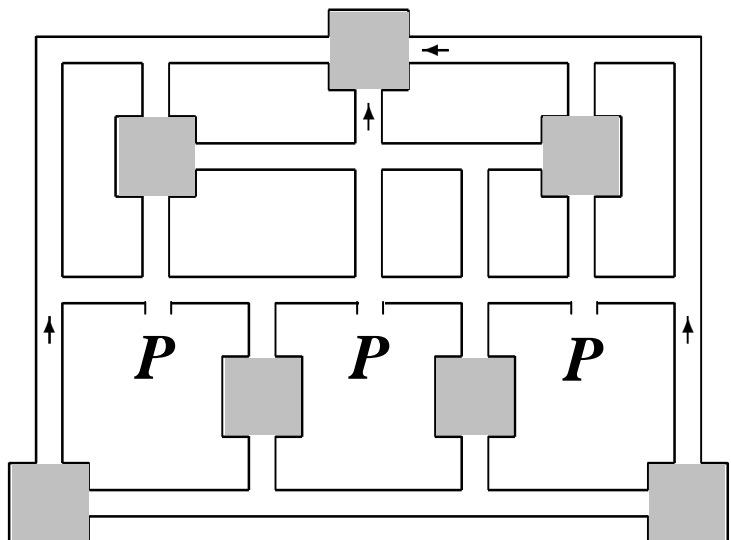
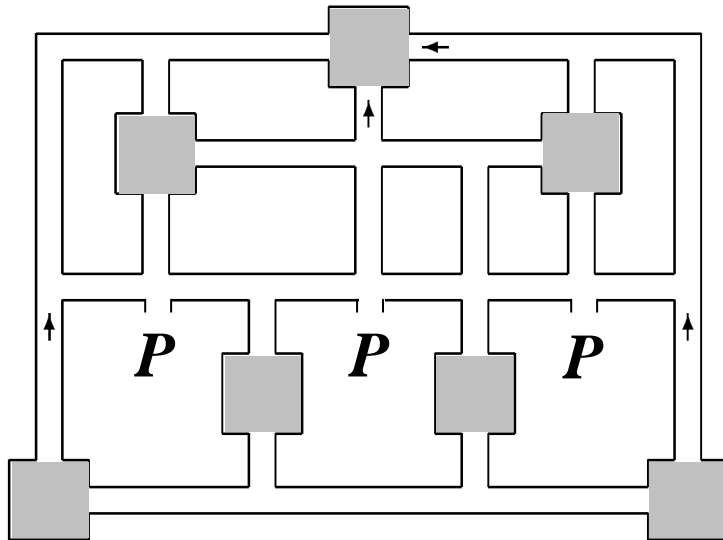


## 队际赛试题

2009/07/08 南非 德班

队名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

4. 如图是一个商业中心的示意图，其中标记有字母  $P$  的区域是三个停车场，其它七个涂上阴影部分是广场。图中的箭头标示该小段街道是单行道，箭头方向指明了的遵行方向(没有箭头的小段则不受此限制)。请绘出一条路径，从其中一个停车场出发，经过所有的广场，最后再回到另一个停车场。请注意：此条路径不可以通过任何路口或点两次或两次以上。



ANSWER: \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

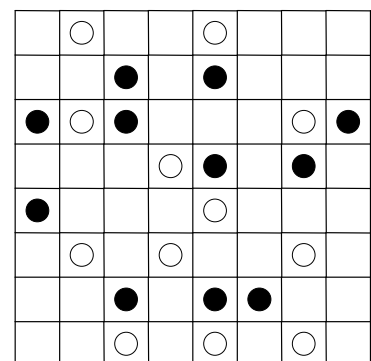
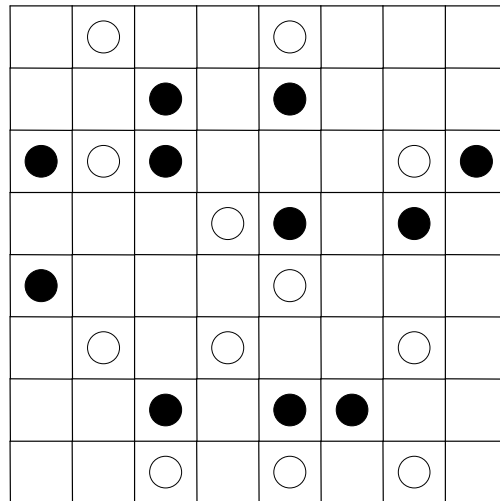


## 队际赛试题

2009/07/08 南非 德班

队名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

5. 请在下图中绘出一条通过每一个小方格一次且不与自身相交的封闭路径，使得路径上的两个相邻的圆圈之间的线段满足下列条件：  
 (i) 若两个圆圈同色，则它们之间由一条直线段相连接；  
 (ii) 若两个圆圈异色，则它们之间由相交为直角的二条直线段相连接。  
 (所绘出的封闭路径必须由水平线段或垂直线段所构成)



ANSWER: \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 队际赛试题

2009/07/08 南非 德班

队名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

6. 已知  $a_n = \frac{2^n}{2^{2n+1} - 2^{n+1} - 2^n + 1}$ , 其中  $n$  为正整数. 证明:  $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2009} < 1$ .

证明

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 队际赛试题

2009/07/08 南非 德班

队名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

7. 请找出所有满足下列条件的正整数的分划方法: 将所有的正整数分为“冷数”与“热数”两类, 使得任意“热数”与“冷数”之和为“热数”, 而乘积为“冷数”。

ANSWER: \_\_\_\_\_



# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

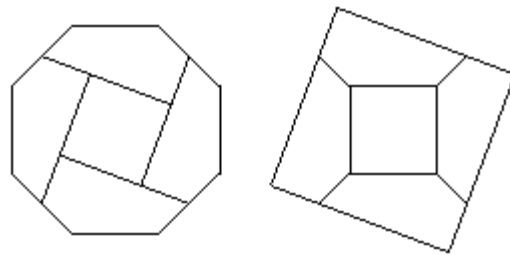


## 队际赛试题

2009/07/08 南非 德班

队名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

8. 下图中指出可将一个正八边形切成一块  $1 \times 1$  的正方形和四块全等的五边形，而它们可重组成一个正方形。试求每块五边形的周长。



# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 队际赛试题

2009/07/08 南非 德班

队名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

9. 每局桥牌都有四位玩家一起玩. 已知玩过的局数恰等于玩家人数, 且任意两位玩家都至少在一起玩过一局. 试求玩家人数的最大值.

ANSWER: \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 队际赛试题

2009/07/08 南非 德班

队名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

10. 试问：2008, 2009, 2010 这三个数中，哪些能写成  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  的形式？  
(其中， $x, y, z$  均为正整数)

ANSWER: \_\_\_\_\_