

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 青少年數學國際城市邀請賽

### 隊際賽試題

#### 答題指引:

- 請勿翻開此頁，直到聽到答題指令為止。
- 請在每一頁的對應位置填寫隊名。
- 本卷試題依照由易至難的順序安排，共有 10 頁，每頁一題，每題 40 分。第 1、2、6、7、8、9、10 題必須詳細填寫計算過程或證明，根據答題情況給分；第 3、4、5 題只需填寫答案。
- 四名隊員先用 10 分鐘討論前八題，確定每題答題的隊員，每位隊員至少要解答一題。然後用 35 分鐘，各自作答，不可再交換題目或討論。最後的 15 分鐘，四名隊員可一起討論最後兩題並合作解題。
- 不得使用任何電子計算器具。
- 不得使用紅筆作答。
- 所有紙張在考試結束時要全部收回。

Traditional Chinese Version  
繁體中文版

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 隊際賽試題

2009/07/08 南非 德班

隊名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

1. 有一疊編號為 1~15 的牌，開始時按某種順序疊好，進行如下兩個操作：將最上面的第一張牌放到桌面上，再把第二張牌放到整疊牌的最下面。不斷重複這兩個操作，直到所有 15 張牌都在桌面上依次疊放成一堆為止。如果桌上的牌之編號從上到下恰好依序排列成 1~15，請問原來的那疊牌，從最底下第一張往上算起的第四張牌是什麼？

ANSWER: \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 隊際賽試題

2009/07/08 南非 德班

隊名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

- 試求最小的正整數，使得它的因數中有末位數是 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 和 9 的數至少各一個。

ANSWER: \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 隊際賽試題

2009/07/08 南非 德班

隊名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

3. 在下圖中填入數碼 1~6 使得在每行、每列及兩條主對角線中 1、2、3、4、5、6 都恰好各出現一次。

2			1		
					4
	2				
				6	
		5			1
3					

2			1		
					4
	2				
				6	
		5			1
3					

ANSWER: \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

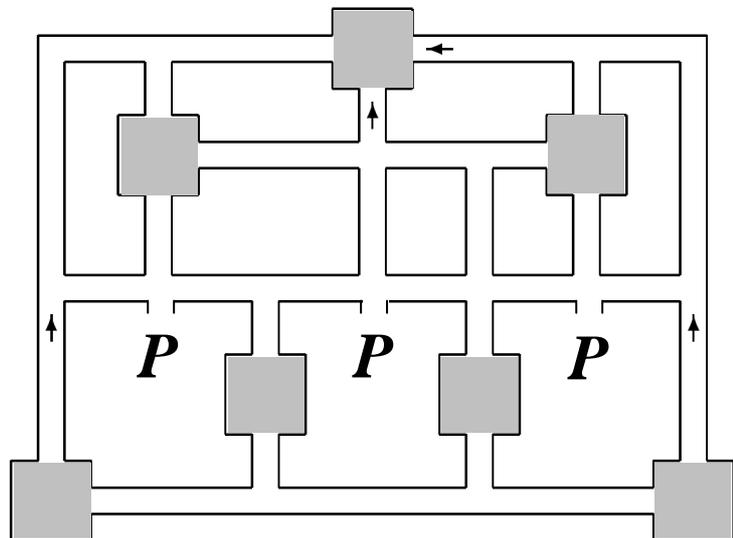
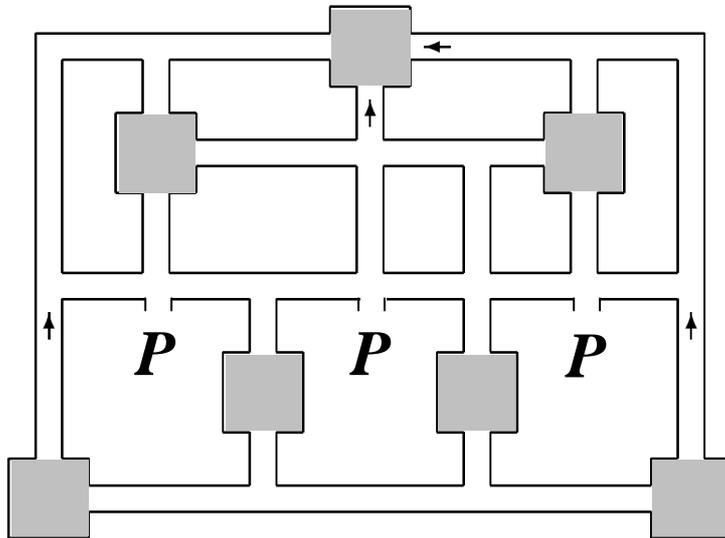


## 隊際賽試題

2009/07/08 南非 德班

隊名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

4. 下圖是一個商業中心的示意圖，其中標記有字母  $P$  的區域是三個停車場，其他七個塗上陰影部分是廣場。圖中的箭頭標示該小段街道是單行道，箭頭方向指明了該小段街道的遵行方向(沒有箭頭的小段則不受此限制)。請繪出一條路徑，從其中一個停車場出發，經過所有的廣場，最後再回到另一個停車場。請注意：此條路徑不可以通過任何點及路口兩次或兩次以上。



ANSWER: \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

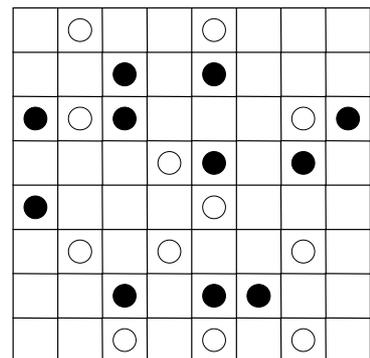
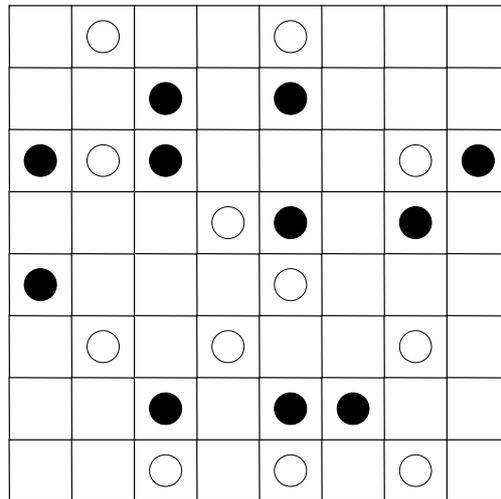


## 隊際賽試題

2009/07/08 南非 德班

隊名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

5. 請在下圖中繪出一條通過每一個小方格一次且不與自身相交的封閉路徑，使得路徑上的兩個相鄰的圓圈之間的線段滿足下列條件：
- (i) 若兩個圓圈同色，則它們之間由一條直線段相連接；
  - (ii) 若兩個圓圈異色，則它們之間由相交為直角的二條直線段相連接。
- (所繪出的封閉路徑必須由水平線段或垂直線段所構成)



**ANSWER:** \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 隊際賽試題

2009/07/08 南非 德班

隊名： \_\_\_\_\_ 得分： \_\_\_\_\_

6. 令  $a_n = \frac{2^n}{2^{2n+1} - 2^{n+1} - 2^n + 1}$ ，其中  $n$  為正整數。證明： $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2009} < 1$ 。

<證明>

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 隊際賽試題

2009/07/08 南非 德班

隊名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

7. 請找出所有滿足下列條件之分配正整數的方法：將所有的正整數分為“冷數”與“熱數”兩類，使得任意“熱數”與“冷數”之和為“熱數”，而乘積為“冷數”。

ANSWER: \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

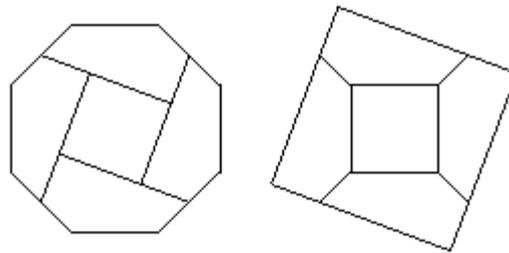


## 隊際賽試題

2009/07/08 南非 德班

隊名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

8. 下圖中指出可將一個正八邊形切成一塊  $1 \times 1$  的正方形和四塊全等的五邊形，而它們可重組成一一個正方形。試求每塊五邊形的周長。



ANSWER: \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 隊際賽試題

2009/07/08 南非 德班

隊名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

9. 每局橋牌都有四位玩家一起玩。已知玩過的局數恰等於玩家總人數，且任意兩位玩家都至少在一起玩過一局。試求玩家人數的最大值。

ANSWER: \_\_\_\_\_

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 隊際賽試題

2009/07/08 南非 德班

隊名: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

10. 請問在 2008、2009、2010 這三個數中，哪些能寫成  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  的形式？  
(其中， $x$ 、 $y$ 、 $z$  均為正整數)

ANSWER: \_\_\_\_\_