



International Mathematics Competition, 25~29 July, 2010, Incheon, Korea,

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

青少年數學國際城市邀請賽

個人賽試題

答題指引:

- 請勿翻開此頁，直到聽到答題指令為止。
- 請在下頁的對應位置填寫隊名、您的姓名及編號。
- 個人賽試題包括二個部份，總分 120 分。
- 第一部份包括填充題 12 題，只須在空格內填寫阿拉伯數值答案，以其它文字書寫一律不計分，不須計算過程，若題目有不只一個答案，則全部答對才給分。每題 5 分，答錯不倒扣。
- 第二部份包括計算證明題 3 題，必須填寫詳細計算過程或證明，每題 20 分，根據答題情況給予部份分數。
- 本卷答題時間：120 分鐘。
- 不得使用任何電子計算器具。
- 可使用鉛筆、藍色或黑色原子筆作答。
- 答題結束後，監試人員會將所有紙張收回。

Traditional Chinese Version

繁體中文版



International Mathematics Competition, 25~29 July, 2010, Incheon, Korea,

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

個人賽試題

答題時間：120 分鐘

2010/07/27 韓國 仁川

隊名：_____ 姓名：_____ 編號：_____ 得分：_____

第一部份：填充題，請將答案填寫在題末所附的空格內，共十二題，每題 5 分。

1. 實數 p 、 q 、 r 滿足 $p+q+r=26$ 和 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 31$ 。請問 $\frac{p}{q} + \frac{q}{r} + \frac{r}{p} + \frac{p}{r} + \frac{r}{q} + \frac{q}{p}$ 的值為多少？

答：_____

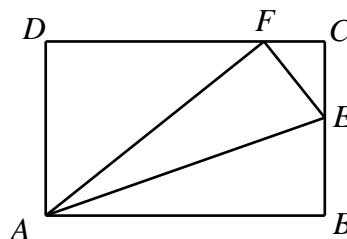
2. 在某次慈善募款餐會上，每人吃了半盤米飯、三分之一盤蔬菜和四分之一盤肉。此餐會總共吃掉 65 盤食物，請問這次募款餐會共有多少人參加？

答：_____

3. 請問滿足 $xyz = 3^{2010}$ 與 $x \leq y \leq z < x + y$ 的三元正整數組 (x, y, z) 共有多少組？

答：_____

4. 點 E 為長方形 $ABCD$ 的邊 BC 上的一點，如果沿著 AE 摺疊，則頂點 B 剛好與邊 CD 上的點 F 重合，如圖所示。假定 $AD = 16$ cm 和 $BE = 10$ cm，請問 AE 的長度為多少 cm？



答：_____ cm

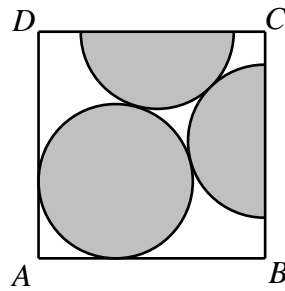
5. 有一個四位數，它恰好有 14 個因數（包括 1 和它本身），且它的一個質因數的個位是 3。請問滿足上述條件的最小四位數是什麼？

答：_____

6. $f(x)$ 為一個關於 x 的四次多項式， $f(t)$ 表示當 $x=t$ 時該多項式的值，若 $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ ， $f(4) = 6$ ， $f(5) = 72$ ，請問 $f(2010)$ 之值的末位數是什麼？

答：_____

7. 在正方形 $ABCD$ 中，一個圓和兩個半圓兩兩相切，它們的半徑都為 1 cm ，且圓與正方形的兩邊也相切，如下圖所示。請問正方形 $ABCD$ 的面積為多少 cm^2 ？



答：_____ cm^2

8. 設 p 與 q 為質數，且滿足 $p^3 + q^3 + 1 = p^2q^2$ ，請問 $p + q$ 的最大值為多少？

答：_____

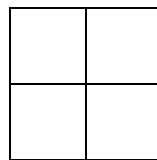
9. 今有 n 個正整數(不一定相異)，它們的和為 100 ，其中任何 7 個數之和小於 15 ，請問 n 的最小值是多少？

答：_____

10. 點 P 是三角形 ABC 內的一點使得 $\angle ABP = 20^\circ$ 、 $\angle PBC = 10^\circ$ 、 $\angle ACP = 20^\circ$ 且 $\angle PCB = 30^\circ$ ，請問 $\angle CAP$ 為多少度？

答：_____。

11. 某位農民養了 100 頭豬和 100 隻雞。他有四個正方形的院子，構成 2×2 的方格。該農民想把他的牲畜分配到各個院子內使得第一列有 120 個頭，第二列有 300 隻腳；第一行有 100 個頭，第二行有 320 隻腳。請問一共有多少種不同的分配方式？



答：_____種方式

12. 有五個籠子排成一排，從左到右的標籤如下圖所示。每個籠子裏面各恰有一隻動物。

紅色	銀色	棕色	白色	灰色
狼	獅子	狐狸	牛	馬

這五隻動物的確是一匹狼、一隻獅子、一隻狐狸、一頭牛和一匹馬，並且它們的顏色的確是紅色、銀色、棕色、白色和灰色。但是，每張標籤標示的顏色與該標籤上標示的動物的顏色不符合(例如，狼不是紅色)。再者，每隻動物都不在與標籤上所標示的顏色或種類相符的籠子內，也不在與其相鄰的籠子內。如果馬不在中間的那個籠子裏，請問馬是什麼顏色？

(註：答案請用 **R, S, B, W, G** 分別代表紅、銀、棕、白、灰色。)

答：_____

第二部份：計算及證明題，請在題目下面空白處寫出計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. 點 A 和點 B 在一個正方形的邊上，線段 AB 把這個正方形分割成兩個多邊形，每個多邊形都有內切圓。其中一個內切圓的半徑為6 cm，而另外一個內切圓的半徑大於6 cm。請問正方形的邊長與兩倍的線段 AB 的長度之差為多少 cm？
2. 在一個糖果店裏賣的糖果有三種包裝，分別是小包有6顆，中包有9顆和大包有20顆。如果我們只按整包購買糖果，請問我們不能購買到的糖果數最多是多少顆？
3. 有一數列 $a_1, a_2, \dots, a_{2010}$ 。對於 $1 \leq n \leq 2010$ ，其中 n 為正整數，令 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。若 $a_1 = 2010$ ，且對所有的 n ，都有 $S_n = n^2 a_n$ ，請問 a_{2010} 之值為多少？