Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

青少年数学国际城市邀请赛

个人赛试题

答题指引:

- 请勿翻开此页，直到听到答题指令为止。
- 请在下页的对应位置填写队名、您的姓名及编号。
- 个人赛试题包括二个部份，总分 120 分。
- 第一部份包括填充题 12 题，只须在空格内填写阿拉伯数值答案，以其它文字书写一律不计分，不须计算过程，若题目有不只一个答案，则**全部**答对才给分。每题 5 分，答错不倒扣。
- 第二部份包括计算证明题 3 题，必须填写详细计算过程或证明，每题 20 分，根据答题情况给予部份分数。
- 本卷答题时间：120 分钟。
- 不得使用任何电子计算器具。
- 可使用铅笔、蓝色或黑色圆珠笔作答。
- 答题结束后，监试人员会将所有纸张收回。

Simplify Chinese Version

简体中文版

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

个人赛试题

答题时间：120 分钟　　　　　　　　2011/07/20 印度尼西亚 巴厘岛

队名: ____________ 姓名: _____________ 编号: _________ 得分: ________

第一部份：填充题，请将答案填写在题末所附的空格内，共十二题，每题 5 分。

1. 已知正整数 a, b 和 c 满足

$$\begin{cases} ab+bc+ca+2(a+b+c)=8045, \\ abc-a-b-c=-2. \end{cases}$$

请问 $a+b+c$ 的值为多少？

答：_________

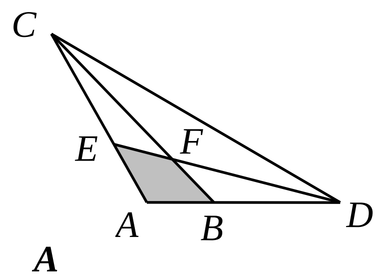
2. 某个班有两类学生，一类学生总是说谎，另一类学生从来不说谎。每位学生都知道其他所有学生分别是什么类型。在今天的一次聚会上，每位学生都被要求说出其他所有学生分别是什么类型，全部的学生总共说了 240 次“说谎者”。在昨天的一次相同的聚会上，有一位学生缺席，参加会议的全部学生总共说了 216 次“说谎者”。请问总共有多少位学生参加今天的聚会？

答：_________位

3. 黑板上写有一个乘式 $1!\times 2!\times\ldots\times 2011!\times 2012!$。请问擦去哪一项阶乘后可以使剩下的乘积等于某个正整数的平方？（阶乘 $n!$ 表示所有小于或等于 n 的正整数的乘积。）

答：_________

4. 点 B 与 E 分别在三角形 ACD 的边 AD 与 AC 上，且 BC 与 DE 交于点 F。已知三角形 ABC 与 AED 全等，并且 $AB=AE=1$ 和 $AC=AD=3$。请问四边形 $ABFE$ 与三角形 ADC 的面积之比为多少？



答：_____:_____

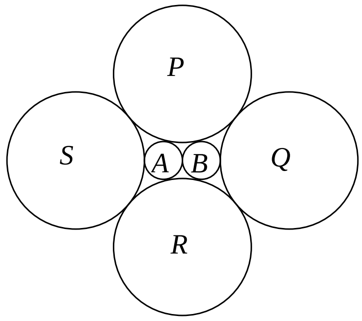
5. 正整数 n 恰好有 4 个正因数(包括 1 和 n)。已知 $n+1$ 是其它两个因数之和的四倍。请问 n 的值为多少？

答：_________

6. 小周告诉小凯有三个正整数的乘积为 36。小周同时还告诉小凯这三个数的和，但小凯还是无法准确知道这三个数分别是什么。请问这三个正整数之和为多少？

答：＿＿＿＿＿

7. 圆 A 和圆 B 的半径都为 1，并且相互外切。圆 P、Q、R、S 的半径都为 r，并且圆 P 与圆 A、B、Q、S 都分别外切；圆 Q 与圆 P、B、R 都分别外切；圆 R 与圆 A、B、Q、S 都分别外切；圆 S 与圆 P、A、R 都分别外切。请问 r 的值为多少？



答：＿＿＿＿＿

8. 已知正整数 n 是 7 与 8 的公倍数，n 各位上的数码全都是 7 或 8，且数码 7 与 8 各至少有一个。请问满足上述条件的最小 n 值是多少？

答：＿＿＿＿＿

9. 在一个三边长分别为 50 cm、 120 cm、130 cm 的三角形的内部与外部，分别取与三角形边上至少有一点的距离为 2 cm 的所有点，请问全部取出的点所构成的区域之面积为多少 cm^2？取 $\pi = 22/7$。

答：＿＿＿＿＿cm^2

10. 正整数 n 满足以下条件：

(1) 它是一个八位数，并且它各位上的数码全都是 0 或 1。

(2) 它的首位数码是 1。

(3) 它的偶数位数码之和等于奇数位数码之和。

请问满足上述条件的 n 有多少个？

答：＿＿＿＿＿

11. 在一个无限大的棋盘的一个小方格上放有一枚棋子，其中每个小方格的大小都是 1 cm×1 cm。将这枚棋子依照以下规则移动：

- 第 1 次移动，棋子向北移动一格。
- 在第 n 次移动中，如果为 n 奇数，则棋子可选择向北或向南移动；如果为 n 偶数，则棋子可选择向东或向西移动。
- 在第 n 次移动中，棋子在同一方向移动 n 格。

将这颗棋子移动 12 次，使得它最后所在的方格的中心与它最初所在的方格的中心的距离尽量地小。请问这个最小的距离为多少 cm？

答：＿＿＿＿＿cm

12. 已知实数 a, b 和 c 满足 $\dfrac{a(b-c)}{b(c-a)} = \dfrac{b(c-a)}{c(b-a)} = k > 0$，其中 k 为某个常数。请问小于或等于 k 的最大整数是什么？

答：＿＿＿＿＿

第二部份：计算及证明题，请在题目下面空白处写出计算或证明过程。共三题，每题 20 分。

1. 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 E。如果 $AE=CE$ 且 $\angle ABC=\angle ADC$，请问 $ABCD$ 肯定是平行四边形吗？

2. 当 a=1, 2, 3, …, 2010, 2011 时，方程 $x^2-2x-a^2-a=0$ 根分别为 (α_1,β_1), $(\alpha_2,\beta_2),(\alpha_3,\beta_3),\cdots,(\alpha_{2010},\beta_{2010}),(\alpha_{2011},\beta_{2011})$。请问式子

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\beta_3}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{2010}}+\frac{1}{\beta_{2010}}+\frac{1}{\alpha_{2011}}+\frac{1}{\beta_{2011}}$$

的值为多少？

3. 已知 15 条射线有共同的端点。请问这 15 条射线最多能构成多少个钝角？（任何两射线所构成的角取为小于或等于 180°的那个角。）