Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

青少年數學國際城市邀請賽

個人賽試題

答題指引：

- 請勿翻開此頁，直到聽到答題指令為止。
- 請在下頁的對應位置填寫隊名、您的姓名及編號。
- 個人賽試題包括二個部份，總分 120 分。
- 第一部份包括填充題 12 題，只須在空格內填寫**阿拉伯數值**答案，以其它文字書寫一律不計分，不須計算過程，若題目有不只一個答案，則**全部**答對才給分。每題 5 分，答錯不倒扣。
- 第二部份包括計算證明題 3 題，必須填寫詳細計算過程或證明，每題 20 分，根據答題情況給予部份分數。
- 本卷答題時間：120 分鐘。
- 不得使用任何電子計算器具。
- 可使用鉛筆、藍色或黑色圓珠筆作答。
- 答題結束後，監試人員會將所有紙張收回。

Traditional Chinese Version

正體中文版

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

個人賽試題

答題時間：120 分鐘　　　　20^{th} July 2011　　　Bali, Indonesia

隊名：__________ 姓名：__________ 編號：________ 得分：________

第一部份：填充題，請將答案填寫在題末所附的空格內，共十二題，每題 5 分。

1. 已知正整數 a, b 和 c 滿足

$$\begin{cases} ab+bc+ca+2(a+b+c)=8045, \\ abc-a-b-c=-2. \end{cases}$$

請問 $a+b+c$ 的值為多少？

答：________

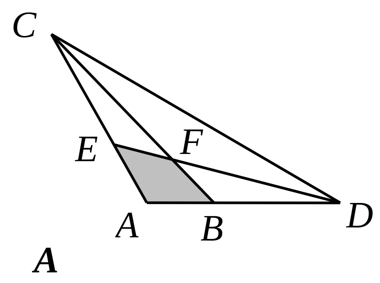
2. 某個班有兩類學生，一類學生總是說謊，另一類學生從來不說謊。每位學生都知道其他所有學生分別是什麼類型。在今天的一次聚會上，每位學生都被要求說出其他所有學生分別是什麼類型，全部的學生總共說了 240 次"說謊者"。在昨天的一次相同的聚會上，有一位學生缺席，參加會議的全部學生總共說了 216 次"說謊者"。請問總共有多少位學生參加今天的聚會？

答：________位

3. 黑板上寫有一個乘式 1!×2! ×…×2011! ×2012!。請問擦去哪一項階乘後可以使剩下的乘積等於某個正整數的平方？（階乘 n!表示所有小於或等於 n 的正整數的乘積。）

答：________

4. 點 B 與 E 分別在三角形 ACD 的邊 AD 與 AC 上，且 BC 與 DE 交於點 F。已知三角形 ABC 與 AED 全等，並且 $AB=AE=1$ 和 $AC=AD=3$。請問四邊形 $ABFE$ 與三角形 ADC 的面積之比是什麼？



答：____ : ____

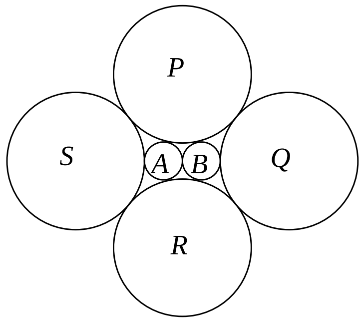
5. 正整數 n 恰好有 4 個正因數(包括 1 和 n)。已知 n+1 是其它兩個因數之和的四倍。請問 n 的值為多少？

答：________

6. 小周告訴小凱有三個正整數的乘積為 36。小周同時還告訴小凱這三個數的和，但小凱還是無法準確知道這三個數分別是什麼。請問這三個正整數之和為多少？

答：________

7. 圓 A 和圓 B 的半徑都為 1，並且相互外切。圓 P、Q、R、S 的半徑都為 r，並且圓 P 與圓 A、B、Q、S 都分別外切；圓 Q 與圓 P、B、R 都分別外切；圓 R 與圓 A、B、Q、S 都分別外切；圓 S 與圓 P、A、R 都分別外切。請問 r 的值為多少？



答：________

8. 已知正整數 n 是 7 與 8 的公倍數， n 的數碼全都是 7 或 8，且數碼 7 與 8 各至少有一個。請問滿足上述條件的最小 n 值是什麼？

答：________

9. 在一個三邊長分別為 50 cm、 120 cm、130 cm 的三角形的內部與外部，分別取與三角形邊上至少有一點的距離為 2 cm 的所有點，請問全部取出的點所構成的區域之面積為多少 cm^2？取 $\pi = 22/7$ 。

答：________cm^2

10. 正整數 n 滿足以下條件：

(1) 它是一個八位數，並且它的數碼全都是 0 或 1。

(2) 它的首位數碼是 1。

(3) 它的偶數位數碼之和等於奇數位數碼之和。

請問滿足上述條件的 n 有多少個？

答：________

11. 在一個無限大的棋盤的一個小方格上放有一枚棋子，其中每個小方格的大小都是 1 cm $\times$1 cm。將這枚棋子依照以下規則移動：

- 第一次移動，棋子向北移動一格。
- 在第 n 次移動中，如果為 n 奇數，則棋子可選擇向北或向南移動；如果為 n 偶數，則棋子可選擇向東或向西移動。
- 在第 n 次移動中，棋子在同一方向移動 n 格。

將這顆棋子移動 12 次，使得它最後所在的方格的中心與它最初所在的方格的中心的距離儘量地小。請問這個最小的距離為多少 cm？

答：________cm

12. 已知實數 a, b 和 c 滿足 $\dfrac{a(b-c)}{b(c-a)} = \dfrac{b(c-a)}{c(b-a)} = k > 0$，其中 k 為某個常數。請問小於或等於 k 的最大整數是什麼？

答：________

第二部份：計算及證明題，請在題目下面空白處寫出計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. 四邊形 $ABCD$ 的對角線 AC 和 BD 相交於點 E。如果 $AE=CE$ 且 $\angle ABC=\angle ADC$，請問 $ABCD$ 肯定是平行四邊形嗎？

2. 當 a=1, 2, 3, …, 2010, 2011 時，方程 $x^2-2x-a^2-a=0$ 根分別為 (α_1,β_1), $(\alpha_2,\beta_2),(\alpha_3,\beta_3),\cdots,(\alpha_{2010},\beta_{2010}),(\alpha_{2011},\beta_{2011})$。請問算式

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\beta_3}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{2010}}+\frac{1}{\beta_{2010}}+\frac{1}{\alpha_{2011}}+\frac{1}{\beta_{2011}}\text{。}$$

的值為多少？

3. 已知 15 條射線有共同的端點。請問這 15 條射線最多能構成多少個鈍角？（任何兩條射線所構成的角取為小於或等於 180°的那個角。）